מתמטיקה ב

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מיידיים 1
2. אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים" 6
3. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 8
4. אינטגרלים בשיטת ההצבה 12
5. אינטגרלים של פונקציות רציונליות 15
6. אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות 20
7. טורים עם איברים קבועים 31
8. סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות 45
9. טורי טיילור - מקלורן 54
10. משוואות מסדר ראשון 57
11. משוואות ליניאריות מסדר שני 79
12. שימושים של משוואות דיפרנציאליות 94
13. וקטורים גיאומטרים 102
14. וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב 112
15. הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות 143
16. חישוב נגזרת של פונקציה 155
17. טריגונומטריה - זהויות ..... (ללא ספר)
18. נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה 168
19. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות 179

מתמטיקה ב

פרק 1 - אינטגרלים מיידיים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים מידיים 1
2. מציאת פונקציה קדומה 4

אינטגרלים מיידיים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-12** (פתירה על ידי הכלל: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$):

1) $\int 4dx$ **2)** $\int x^4 dx$ **3)** $\int \frac{1}{x^2} dx$

4) $\int \sqrt{x} dx$ **5)** $\int \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$ **6)** $\int 4x^{10} dx$

7) $\int (2x^2 - x + 1) dx$ **8)** $\int \left(\frac{3}{x^4} + 2\sqrt[3]{x}\right) dx$ **9)** $\int (x^2+1)^2 dx$

10) $\int (x^2+1)(x+2) dx$ **11)** $\int \frac{1+2x^2+x^4}{x^2} dx$ **12)** $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **13-20**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\cdot(n+1)} + c$)

13) $\int (4x+1)^{10} dx$ **14)** $\int (x^2-2x+1)^{10} dx$ **15)** $\int \frac{4}{(x-2)^5} dx$

16) $\int \sqrt[3]{4x-10} dx$ **17)** $\int \frac{10}{\sqrt{2x+4}} dx$ **18)** $\int \frac{x}{(x-1)^4} dx$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}-\sqrt{x}}$ **20)** $\int \frac{xdx}{\sqrt{x+1}+1}$

חשבו את האינטגרלים בשאלות **21-26**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int \frac{1}{ax+b} dx = \frac{\ln|ax+b|}{a} + c$)

21) $\int \frac{1}{4x} dx$ **22)** $\int \frac{1+x+x^2}{x} dx$ **23)** $\int \left(1+\frac{1}{x}\right)^2 dx$

24) $\int \frac{1}{4x-1} dx$ **25)** $\int \frac{x+3}{x+2} dx$ **26)** $\int \frac{4x+1}{x+2} dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

חשבו את האינטגרלים בשאלות **27-29**:

(פתירה על ידי הכלל: $\int e^{ax+b}dx=\frac{e^{ax+b}}{a}+c$)

27) $\int\left(e^{4x}+e^{-x}\right)dx$

28) $\int\left(e^{x+1}\right)^2dx$

29) $\int\left(4\sqrt{e^x}+\frac{1}{\sqrt[3]{e^{4x}}}\right)dx$

30) חשבו את האינטגרל: $\int\frac{2^x+4^{2x}+10^{3x}}{5^x}dx$

(פתירה על ידי הכלל: $\int a^{mx+n}dx=\frac{a^{mx+n}}{m\ln a}+c$)

חשבו את האינטגרלים בשאלות **31-33**:

31) $\int\frac{1}{1+4x^2}dx$

32) $\int\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}dx$

33) $\int\frac{x^2}{1-x^2}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $4x+c$

2) $\frac{x^5}{5}+c$

3) $-\frac{1}{x}+c$

4) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+c$

5) $-\frac{2}{\sqrt{x}}+c$

6) $\frac{4x^{11}}{11}+c$

7) $\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x+c$

8) $-\frac{1}{x^3}+\frac{3\sqrt[3]{x^4}}{2}+c$

9) $\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x+c$

10) $\frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x+c$

11) $-\frac{1}{x}+2x+\frac{x^3}{3}+c$

12) $\frac{x^{1.5}}{1.5}+\frac{x^{0.5}}{0.5}+c$

13) $\frac{(4x+11)^{11}}{44}+c$

14) $\frac{(x-1)^{21}}{21}+c$

15) $-\frac{1}{(x-2)^4}+c$

16) $\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x-10)^4}+c$

17) $10\sqrt{2x+4}+c$

18) $-\frac{1}{2(x-1)^2}-\frac{1}{3(x-1)^3}+c$

19) $-\frac{2}{3}\left((x-1)^{3/2}+x^{3/2}\right)+c$

20) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}-x+c$

21) $\frac{\ln|x|}{4}+c$

22) $\ln|x|+x+\frac{x^2}{2}+c$

23) $x+2\ln|x|-\frac{1}{x}+c$

24) $\frac{\ln|4x-1|}{4}+c$

25) $x+\ln|x+2|+c$

26) $4\left(x-1.75\ln|x+2|\right)+c$

27) $\frac{e^{4x}}{4}-e^{-x}+c$

28) $\frac{e^{2x+2}}{2}+c$

29) $8e^{\frac{x}{2}}-\frac{3e^{-\frac{4x}{3}}}{4}+c$

30) $\frac{\left(\frac{2}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)}+\frac{\left(\frac{16}{5}\right)^x}{\ln\left(\frac{16}{5}\right)}+\frac{(200)^x}{\ln(200)}+c$

31) $\frac{1}{2}\arctan(2x)+c$

32) $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)+c$

33) $-\left(x-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מציאת פונקציה קדומה

שאלות

1) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=2x-\sqrt[3]{4x}$.
ידוע כי הפונקציה עוברת בנקודה $(2,3)$.
מצאו את הפונקציה.

2) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\sqrt[3]{5x+7}$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=4$.
מצאו את הפונקציה.

3) נתונה הנגזרת הבאה: $f'(x)=\frac{10}{\sqrt[5]{x+1}}+(x-1)^2$.
ידוע כי הפונקציה חותכת את ציר ה- y בנקודה שבה $y=-6$.
מצאו את הפונקציה.

4) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=2x-6$.
ערך הפונקציה בנקודת הקיצון שלה הוא 5.
מצאו את הפונקציה.

5) נתונה נגזרת של פונקציה: $f'(x)=\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1}+2$.
שיפוע המשיק לפונקציה, בנקודה שבה $y=5\frac{2}{3}$, הוא 3.
מצאו את הפונקציה.

6) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=6x+6$.
שיפוע הפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא -12,
וערך הפונקציה בנקודה זו הוא 1.
מצאו את הפונקציה.

7) נתונה הנגזרת השנייה של פונקציה: $f''(x)=1+\frac{8}{x^3}$.
המשיק לפונקציה בנקודת הפיתול שלה הוא הישר $y=-4$.
מצאו את הפונקציה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתונה פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(0)=0$,

ונתון בנוסף כי לכל x_0 ממשי: $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=|x_0|$.

א. מצאו את תחומי הרציפות של הפונקציה.

ב. חשבו את הגבול הבא או קבעו שהוא אינו קיים $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

ג. מצאו כמה נקודות חיתוך יש לגרף הפונקציה עם ציר ה- x .

ד. מצאו את כל נקודות הפיתול של הפונקציה.

ה. תהי $G(x)$ פונקציה קדומה של $|x|$.

חשבו את הנגזרת $\left(G(x)-f(x)\right)'$.

תשובות סופיות

1) $f(x)=x^2-\frac{3}{16}\sqrt[3]{(4x)^4}+2$

2) $f(x)=\frac{3}{20}\sqrt[3]{(5x+7)^4}-12\frac{3}{20}$

3) $f(x)=12\frac{1}{2}\sqrt[5]{(x+1)^4}+\frac{1}{3}(x-1)^3-18\frac{1}{6}$

4) $f(x)=x^2-6x+14$

5) $f(x)=\frac{2}{3}\sqrt{(x+2)^3}-\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2x-3$

6) $f(x)=x^3+3x^2-9x-10$

7) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{4}{x}+3x+2$

8) א. רציפה לכל x . ב. $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ ג. נקודת חיתוך אחת $(0,0)$.

ד. נקודת פיתול אחת $(0,0)$. ה. 0

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 2 - אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת הנגזרת כבר בפנים..... 6

אינטגרלים בשיטת "הנגזרת כבר בפנים"

שאלות

הערה: את האינטגרלים בפרק זה ניתן לפתור גם בעזרת שיטת ההצבה.

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{x^2+1}dx$

2) $\int \cot x dx$

3) $\int \frac{x^2}{x^3+1}dx$

4) $\int \tan x dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln x}dx$

6) $\int \frac{e^{x+2}}{e^x+1}dx$

7) $\int e^{x^2}2x dx$

8) $\int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x}dx$

9) $\int e^{-2x^2}x dx$

10) $\int \cos\left(2x^2+1\right)\cdot 4x dx$

11) $\int \cos\left(\sin x\right)\cdot \cos x dx$

12) $\int \frac{\cos\left(\ln x\right)}{x}dx$

13) $\int \cos\left(10x^4+1\right)x^3 dx$

14) $\int \sin\left(x^2+1\right)x dx$

15) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

16) $\int \frac{\ln x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{\left(\tan x\right)}{\cos^2 x}dx$

19) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}dx$

20) $\int \frac{\cos x}{\sqrt{2\sin x}}dx$

21) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$

22) $\int x^2\sqrt{x^3+4}dx$

23) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

24) $\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{1+x^2}dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\ln\left|x^2+1\right|+c$

2) $\ln\left|\sin x\right|+c$

3) $\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+c$

4) $-\ln\left|\cos x\right|+c$

5) $\ln\left|\ln\left|x\right|\right|+c$

6) $e^2\ln\left|e^x+1\right|+c$

7) $e^{x^2}+c$

8) $e^{\tan x}+c$

9) $-\frac{e^{-2x^2}}{4}+c$

10) $\sin\left(2x^2+1\right)+c$

11) $\sin\left(\sin x\right)+c$

12) $\sin\left(\ln x\right)+c$

13) $\frac{1}{40}\sin\left(10x^4+1\right)+c$

14) $-\frac{1}{2}\cos\left(x^2+1\right)+c$

15) $-2\cos\left(\sqrt{x}\right)+c$

16) $\frac{1}{2}\left(\ln x\right)^2+c$

17) $\frac{1}{2}\left(\arctan x\right)^2+c$

18) $\frac{1}{2}\left(\tan x\right)^2+c$

19) $2\sqrt{x^2+1}+c$

20) $\sqrt{2\sin x}+c$

21) $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}+c$

22) $\frac{2}{9}\left(x^3+4\right)^{\frac{3}{2}}+c$

23) $\frac{2}{3}\left(\ln x\right)^{\frac{3}{2}}+c$

24) $\frac{2}{3}\left(\arctan x\right)^{\frac{3}{2}}+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 3 - אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים 8

אינטגרלים בשיטת אינטגרציה בחלקים

שאלות

חשבו את האינטגרלים בשאלות **1-23**:

1) $\int xe^x dx$ **2)** $\int x^4 \ln x dx$ **3)** $\int x \sin x dx$

4) $\int \left(x^2+2x+3\right)\ln x dx$ **5)** $\int x^2 \sin 4x dx$ **6)** $\int x^2 e^{-4x} dx$

7) $\int \ln x dx$ **8)** $\int \ln \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$ **9)** $\int \arctan x dx$

10) $\int \arcsin x dx$ **11)** $\int x \cdot \ln \sqrt[5]{x-2} dx$ **12)** $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$

13) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ **14)** $\int x \arctan x dx$ **15)** $\int x^2 \ln\left(x^2+1\right) dx$

16) $\int \ln^2 x dx$ **17)** $\int \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 dx$ **18)** $\int e^x \cos x dx$

19) $\int e^{2x} \sin 4x dx$ **20)** $\int \sqrt{1-x^2} dx$ **21)** $\int \frac{xe^x}{(x+1)^2} dx$

22) $\int x \tan^2 x dx$ **23)** $\int (x+1)^4 \cdot \sqrt{x+2} dx$

24) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int x^n e^x dx$ באשר n טבעי.

25) חשבו את $\int x^4 e^x dx$.

26) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \cos^n x dx$ באשר n טבעי.

27) חשבו את $\int \cos^4 x dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \sin^n x dx$ באשר n טבעי.

29) חשבו את $\int \sin^4 x dx$.

30) מצאו נוסחת נסיגה עבור $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^n} dx$ באשר n טבעי.

31) חשבו את $\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)^4} dx$.

32) חשבו את האינטגרלים $\int e^{ax} \sin bx dx$, $\int e^{ax} \cos bx dx$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $xe^x - e^x + c$

2) $\frac{x^5}{5}\left(\ln x - \frac{1}{5}\right) + c$

3) $x\cos x + \sin x + c$

4) $\left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x\right)\ln x - \frac{x^3}{9} + \frac{x^2}{2} + 3x + c$

5) $-\frac{x^2}{4}\cos 4x + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}\sin x + \frac{1}{16}\cos 4x\right) + c$

6) $-\frac{x^2}{4}e^{-4x} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}xe^{-4x} - \frac{1}{16}e^{-4x}\right) + c$

7) $x\ln x - x + c$

8) $-\frac{1}{3}\left(x\ln x - x\right) + c$

9) $x\arctan x - \frac{1}{2}\ln\left|1 + x^2\right| + c$

10) $x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$

11) $\frac{1}{5}\left(\frac{x^2}{2}\ln\left(x-2\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + 2x + 4x\ln\left|x-2\right|\right)\right) + c$

12) $x\tan x + \ln\left|\cos x\right| + c$

13) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{1}{x} + c$

14) $\arctan x \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \arctan x\right) + c$

15) $\frac{x^3}{3}\ln\left(x^2 + 1\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{x^3}{3} - x + \arctan x\right) + c$

16) $x\left(\ln x\right)^2 - 2\left(x\ln x - x\right) + c$

17) $-\frac{1}{x}\ln x - \frac{2}{x}\left(\ln x - 1\right) + c$

18) $-e^x\cos x + \frac{e^x\left(\sin x + \cos x\right)}{2} + c$

19) $\frac{e^{2x}\left(-\cos 4x + \frac{1}{2}\sin 4x\right)}{5} + c$

20) $\frac{x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x}{2} + c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) $\frac{e^x}{x+1}+c$

22) $x(\tan x-x)+\ln|\cos x|+\frac{x^2}{2}+c$

23) $\frac{2}{9}(x+1)(x+2)^{\frac{9}{2}}-\frac{4}{99}(x+2)^{\frac{11}{2}}+c$

24) $x^n e^x-n\int x^{n-1}e^x dx$

25) $e^x\left(x^4-4x^3+12x^2-24x+24\right)+c$

26) $\frac{1}{n}\left\{(\cos x)^{n-1}\sin x+(n-1)\int(\cos x)^{n-2}dx\right\}$

27) $\frac{1}{4}\left(\cos^3 x\sin x+3\cdot 5(\cos x\sin x+x)\right)+c$

28) $\frac{1}{n}\left(-(\sin x)^{n-1}\cos x+(n-1)\int(\sin x)^{n-2}dx\right)$

29) $\frac{1}{4}\left(-\sin^3 x\cos x+3\cdot 5(x-\sin x\cos x)\right)+c$

30) $\frac{1}{2n}\left(\frac{x}{(1+x^2)^n}+\int\frac{dx}{(1+x^2)^n}(2n-1)\right)$

31) $\frac{1}{6}\left\{\frac{x}{(1+x^2)^3}+\frac{1}{4}\left\{\frac{x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{2}\left\{\frac{x}{1+x^2}+\arctan x\right\}\right\}\right\}$

32) $\int e^{ax}\cos bx dx=e^{ax}\frac{b\sin bx+a\cos bx}{a^2+b^2}$, $\int e^{ax}\sin bx dx=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 4 - אינטגרלים בשיטת ההצבה

תוכן העניינים

1. אינטגרלים בשיטת ההצבה 12

אינטגרלים בשיטת ההצבה

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}dx$

2) $\int \sqrt{x^3+4}\cdot x^5 dx$

3) $\int \frac{2x^3}{\sqrt{x^2+1}}dx$

4) $\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$

5) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}dx$

6) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx$

7) $\int e^{x^2}x^3 dx$

8) $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$

9) $\int \frac{1}{\sqrt{x(1+x)}}dx$

10) $\int 2x^3\cos\left(x^2+1\right)dx$

11) $\int x^3\left(3x^2-1\right)^{14}dx$

12) $\int \frac{\cos^2(\ln x)}{x}dx$

13) $\int \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}dx$

14) $\int \ln^3 x dx$

15) $\int \frac{x^3 dx}{x^8+2}$

16) $\int \frac{\ln^4 x}{x}dx$

17) $\int \frac{\arctan^2 x}{1+x^2}dx$

18) $\int \frac{dx}{x\cdot\ln x\cdot\ln(\ln x)}$

19) $\int \arctan\sqrt{x}dx$

20) $\int \frac{x^7}{\left(1-x^4\right)^2}dx$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^{2x}}}$

22) $\int \cos(\ln x)dx$

23) $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}dx$

24) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{x^2+1}+c$

2) $\frac{2}{3}\left(\frac{\left(\sqrt{x^3+4}\right)^5}{5}-\frac{4}{3}\left(\sqrt{x^3+4}\right)^3\right)+c$

3) $2\left(\frac{\sqrt{x^2+1}^3}{3}-\sqrt{x^2+1}\right)+c$

4) $\arctan\left(e^x\right)+c$

5) $-\frac{1}{3(\ln x)^3}+c$

6) $\arcsin(\ln x)+c$

7) $\frac{1}{2}\left(x^2e^{x^2}-e^{x^2}\right)+c$

8) $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x}^2-2\sqrt[3]{x}+2\right)+c$

9) $\ln\left|\left(x+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right|+c$

10) $x^2\sin\left(x^2+1\right)+\cos\left(x^2+1\right)+c$

11) $\frac{1}{18}\left(\frac{\left(3x^2-1\right)^{16}}{16}+\frac{\left(3x^2-1\right)^{15}}{15}\right)+c$

12) $\frac{1}{2}\left(\ln x+\frac{1}{2}\sin(2\ln x)\right)+c$

13) $\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right|+c$

14) $x\left(\ln^3 x-3\ln^2 x+6\ln x-6\right)+c$

15) $\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x^4}{\sqrt{2}}\right)+c$

16) $\frac{(\ln x)^5}{5}+c$

17) $\frac{(\arctan x)^3}{3}+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) $\ln\left|\ln\left(\ln x\right)\right|+c$

19) $x\arctan\sqrt{x}-\sqrt{x}+\arctan\sqrt{x}+c$

20) $-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{1-x^4}-\ln\left|1-x^4\right|\right)+c$

21) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1}\right|+c$

22) $\frac{x}{2}\left(\cos\left(\ln x\right)+\sin\left(\ln x\right)\right)+c$

23) $6\left(\sqrt[6]{x}-\arctan\sqrt[6]{x}\right)+c$

24) $\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^7}{7}-\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}\right)^4}{4}+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 5 - אינטגרלים של פונקציות רציונליות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים של פונקציה רציונלית 15
2. חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית 17
3. אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית 18

אינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{x+1}{(x-4)^2}dx$

2) $\int \frac{2x+5}{(x^2-2x+1)^4}dx$

3) $\int \frac{dx}{x^2-4}$

4) $\int \frac{2-x}{x^2+5x}dx$

5) $\int \frac{x}{x^2+5x+6}dx$

6) $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-x}dx$

7) $\int \frac{6x^2+4x-6}{x^3-7x-6}dx$

8) $\int \frac{10x}{x^4-13x^2+36}dx$

9) $\int \frac{8x}{(x-2)^2(x+2)}dx$

10) $\int \frac{5-x}{x^3+x^2}dx$

11) $\int \frac{9x+36}{x^3+6x^2+9x}dx$

12) $\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)(x^2-4x+4)}$

13) $\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

14) $\int \frac{1}{x^2+x+1}dx$

15) $\int \frac{2x^2+x-1}{(x^2+1)(x-3)}dx$

16) $\int \frac{2x^2+2x+1}{(x^2+1)(x+2)}dx$

17) $\int \frac{3}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$

18) $\int \frac{1}{x(x^2+1)^2}dx$

19) $\int \frac{25x^2}{(x-1)(x^2+4)^2}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\ln|x-4|-\frac{5}{x-4}+c$

2) $-\frac{1}{3(x-6)^6}-\frac{1}{(x-1)^7}+c$

3) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|+c$

4) $\frac{2}{5}\ln|x|-\frac{7}{5}|x+5|+c$

5) $3\ln|x+3|-2\ln|x+2|+c$

6) $\ln|x|+\frac{1}{2}|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+1|+c$

7) $\ln|x+1|+2\ln|x+2|+3\ln|x-3|+c$

8) $\ln|x+3|+\ln|x-3|-\ln|x+2|-\ln|x-2|+c$

9) $\ln|x-2|-\frac{4}{x-2}-\ln|x+2|+c$

10) $6\ln\left|\frac{x+1}{x}\right|-\frac{5}{x}+c$

11) $4\ln\left|\frac{x}{x+3}\right|+\frac{3}{x+3}+c$

12) $2\ln\left|\frac{x-1}{x-2}\right|-\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x-2}+c$

13) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

14) $\frac{1}{\sqrt{3/4}}\arctan\left(\frac{x+0.5}{\sqrt{3/4}}\right)+c$

15) $\arctan x+2\ln|x-3|+c$

16) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\ln|x+2|+c$

17) $\arctan x-\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+c$

18) $\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+\frac{1}{2\left(x^2+1\right)}+c$

19) $\frac{1}{16}\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חילוק פולינומים ואינטגרלים של פונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{3x^3-5x^2+4x-2}{x-1}dx$

2) $\int \frac{x^4+2x^3-10x^2-8x}{x+4}dx$

3) $\int \frac{12x^3-11x^2+6x-1}{4x-1}dx$

4) $\int \frac{x^4-2x^3+x^2+x}{(x-1)^2}dx$

5) $\int \frac{x^4-4x^2+x+1}{x^2-4}dx$

תשובות סופיות

1) x^3-x^2+2x+c

2) $\frac{x^4}{4}-\frac{2x^3}{3}-x^2+c$

3) x^3-x^2+x+c

4) $\frac{x^3}{3}+\ln|x-1|-\frac{1}{x-1}+c$

5) $\frac{x^3}{3}+\frac{3}{4}\ln|x-2|+\frac{1}{4}\ln|x+2|+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים שמשלבים הצבה ופונקציה רציונלית

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}-x}$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}$

3) $\int \frac{1}{1+\sqrt[4]{x-1}}dx$

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x+1}dx$

5) $\int \frac{1}{1+e^x}dx$

6) $\int \sqrt{1+e^x}dx$

7) $\int \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-1.5\ln\left|1-\sqrt[3]{x}^{2}\right|+c$

2) $6\left(\frac{\left(1+\sqrt[6]{x}\right)^{3}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)}{2}+3\left(1+\sqrt[6]{x}\right)-\ln\left|1+\sqrt[6]{x}\right|\right)+c$

3) $4\left(\frac{\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{3}-\frac{3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)^{2}}{2}+3\left(1+\sqrt[4]{x-1}\right)-\ln\left|1+\sqrt[4]{x-1}\right|\right)+c$

4) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{x}+\ln\left|\sqrt[3]{x}+1\right|-\frac{1}{2}\ln\left(\left(\sqrt[3]{x}-0.5\right)^{2}+0.75\right)-\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{3}}\right)+c$

5) $-\ln\left|1+e^{x}\right|+x+c$

6) $2\sqrt{1+e^{x}}+\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^{x}}-1}{\sqrt{1+e^{x}}+1}\right|+c$

7) $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{x}\right|+c$

נוסחאות

$$\left(a-b\right)^{3}=a^{3}-3a^{2}b+3ab^{2}-b^{3}$$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 6 - אינטגרלים טריגונומטריים והצבות טריגונומטריות

תוכן העניינים

1. אינטגרלים טריגונומטריים - מבוא ..... (ללא ספר)
2. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי זהויות 20
3. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבות פשוטות 22
4. אינטגרלים טריגונומטריים - פתרון על ידי הצבה כללית 23
5. הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים 24
6. חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות 27

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי זהויות

זכרו כי:

$\int \cos x dx = \sin x + c$	$\int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b)+c$
$\int \sin x dx = -\cos x + c$	$\int \sin(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)+c$
$\int \tan x dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + c$	$\int \tan(ax+b)dx = -\frac{1}{a}\ln\lvert\cos(ax+b)\rvert + c$
$\int \cot x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + c$	$\int \cot(ax+b)dx = \frac{1}{a}\ln\lvert\sin(ax+b)\rvert + c$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \tan x + c$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)}dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$
$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\cot x + c$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)}dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)+c$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\left(\sin 2x - 4\cos\frac{x}{3}\right)dx$

2) $\int \frac{dx}{\cos^2 4x}$

3) $\int \frac{dx}{\sin^2 10x}$

4) $\int\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)dx$

5) $\int\left(\cos^4 x - \sin^4 x\right)dx$

6) $\int\left(\sin x + \cos x\right)^2 dx$

7) $\int \sin x\cos x\cos 2x dx$

8) $\int \tan^2 x dx$

9) $\int \frac{dx}{\left(\sin x\cos x\right)^2}$

10) $\int \sin 7x\cos 5x dx$

11) $\int\left(\cos x\cos 2x + \sin x\sin 2x\right)dx$

12) $\int\left(\sin^4 x + \cos^4 x\right)dx$

13) $\int \cos^2 x dx$

14) $\int \sin^2 4x dx$

15) $\int \cos^3 x dx$

16) $\int \sin^3 4x dx$

17) $\int \cos^4 x dx$

18) $\int \sin^4 4x dx$

19) $\int \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}dx$

20) $\int \frac{\sin 5x - \sin x}{\sin 4x - \sin 2x}dx$

21) $\int \frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x + 1}dx$

22) $\int \frac{\sin^3 x}{1-\cos x}dx$

23) $\int \frac{1+\cos^3 x}{\cos^2\frac{x}{2}}dx$

24) $\int \sin^2 x\cos^4 x dx$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{2}\cos 2x-12\sin\frac{x}{3}+c$

2) $\frac{1}{4}\tan 4x+c$

3) $-10\cot 10x+c$

4) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

5) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$

6) $x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

7) $-\frac{1}{16}\cos 4x+c$

8) $\tan x-x+c$

9) $\tan x-\cot x+c$

10) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{12}\cos 12x-\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$

11) $\sin x+c$

12) $\frac{3}{4}x+\frac{1}{16}\sin 4x+c$

13) $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+c$

14) $\frac{x}{2}-\frac{\sin 8x}{16}+c$

15) $\frac{3}{4}\sin x+\frac{1}{12}\sin 3x+c$

16) $-\frac{3}{16}\cos 4x+\frac{1}{48}\cos 12x+c$

17) $\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+c$

18) $\frac{3}{8}x-\frac{1}{16}\sin 8x+\frac{1}{128}\sin 16x+c$

19) $-\cot x-x+c$

20) $2\sin x+c$

21) $\ln|\cos x|+c$

22) $-\cos x-\frac{1}{4}\cos 2x+c$

23) $3x+\frac{1}{2}\sin 2x-2\sin x+c$

24) $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 2x-\frac{1}{8}\sin 4x-\frac{1}{24}\sin 6x\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבות פשוטות

זכרו כי:

$$\int f(\sin x)\cdot\cos x dx = \left|\begin{matrix}\sin x = t\\ (x=\arcsin t)\end{matrix}\right| = \int f(t)\,dt$$

$$\int f(\cos x)\cdot\sin x dx = \left|\begin{matrix}\cos x = t\\ (x=\arccos t)\end{matrix}\right| = \int f(t)(-dt)$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int(\sin^2 x+\sin x+2)\cos x dx$

2) $\int(\cos^3 x+\cos x-2)\sin x dx$

3) $\int\cos^3 x dx$

4) $\int\sin^3 2x dx$

5) $\int\sin^4 x\cos^5 x dx$

6) $\int\sin^5 x\cos^4 x dx$

7) $\int\cos^5 x dx$

8) $\int\tan^5 x dx$

9) $\int\frac{1}{\cos x}dx$

10) $\int\frac{dx}{\sin x}$

11) $\int\sin 2x\cdot e^{\cos x}dx$

12) $\int\frac{2\sin x}{\cos 2x+4\cos x+7}dx$

תשובות סופיות

1) $\frac{\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^2 x}{2}+2\sin x+c$

2) $\frac{-\cos^4 x}{4}-\frac{\cos^2 x}{2}+2\cos x+c$

3) $\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$

4) $-\frac{1}{2}\left(\cos 2x-\frac{\cos^3 2x}{3}\right)+c$

5) $\frac{1}{5}\sin 5x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+c$

6) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{2}{7}\cos^7 x-\frac{1}{9}\cos^9 x+c$

7) $\sin x-\frac{2}{3}\sin^3 x+\frac{\sin^5 x}{5}+c$

8) $\frac{1}{4\cos^4 x}+\frac{1}{\cos^2 x}-\ln|\cos x|+c$

9) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right|+c$

10) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+c$

11) $-2e^{\cos x}(\cos x-1)+c$

12) $-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{\cos x+1}{\sqrt{2}}\right)+c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אינטגרלים טריגונומטריים – פתרון על ידי הצבה כללית

זכרו כי:

$$\int f(\sin x,\cos x)\,dx=\left|\begin{array}{c} t=\tan\frac{x}{2} \\ (x=2\arctan t)\end{array}\right|=\int f\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int\frac{dx}{1+\sin x}$

2) $\int\frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$

3) $\int\frac{\cos x}{2-\cos x}\,dx$

תשובות סופיות

1) $-\frac{2}{\tan\left(\frac{x}{2}\right)+1}+c$

2) $\ln\left|1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right|+c$

3) $-x+2\left(\frac{2}{3\sqrt{1/3}}\arctan\left(\frac{\tan(x/2)}{\sqrt{1/3}}\right)\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצבות טריגונומטריות שמטרתן להיפטר משורשים

$$\int f\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t \\ (t = \arcsin\frac{x}{a}) \end{matrix} \right| = \int f\left(a\cos t\right)\cdot\left(a\cos t dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = a\tan t \\ (t = \arctan\frac{x}{a}) \end{matrix} \right| = \int f\left(\frac{a}{\cos t}\right)\cdot\left(\frac{a}{\cos^2 t}dt\right)$$

$$\int f\left(\sqrt{x^2-a^2}\right)dx = \left| \begin{matrix} x = \frac{a}{\cos t} \\ (t = \arccos\frac{a}{x}) \end{matrix} \right| = \int f\left(a\tan t\right)\cdot\left(\frac{-a\sin t}{\cos^2 t}dt\right)$$

שאלות

חשבו את האינטגרלים הבאים:

1) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

2) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}dx$

3) $\int \sqrt{4x^2-1}dx$

הערה: כדי לפתור את השאלה צריך לדעת "אינטגרלים של פונקציות רציונליות".

4) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$

5) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

6) $\int \sqrt{x^2+2x-3}dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

7) $\int \sqrt{-6x-x^2}\,dx$

8) $\int \frac{dx}{\left(4+x^2\right)^2}$

9) $\int \frac{dx}{\left(x^2+2x+5\right)^{3/2}}$

10) $\int \sqrt{x^2+1}\,dx$

11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{4}\cot\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)+c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}{1-\sin\left(\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right)}\right|+c$

3) $\frac{1}{8}\left[\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}}\right]+c$

4) $\sin\left(\arccos\left(\frac{1}{x}\right)\right)+c$

5) $2\left\{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\sin\left(2\left(\arcsin\frac{x}{2}\right)\right)\right\}+c$

6) $\ln\left|1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|+\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}-\ln\left|1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}\right|-\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{4}{(x+1)^2}}}+c$

7) $\frac{9}{2}\left\{\arcsin\frac{x+3}{3}+\frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x+3}{3}\right)\right\}+c$

8) $\frac{1}{16}\left\{\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{2}\sin\left(2\arctan\frac{x}{2}\right)\right\}+c$

9) $\frac{1}{4}\sin\left(\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)+c$

10) $\left\{\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{1+x^2}+x\right|+\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}\right\}$

11) $\ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

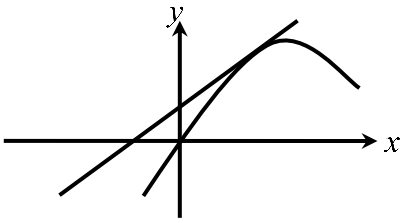
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישוב שטחים בין פונקציות טריגונומטריות

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x+2\sin x$.

בתחום שבין ראשית הצירים לנקודת המקסימום הראשונה מימינה העבירו לפונקציה משיק ששיפועו 1.

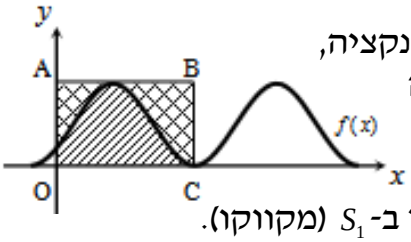


א. מצאו את משוואת המשיק.

ב. חשבו את גודל השטח הכלוא בין הפונקציה, המשיק וציר ה- x , ברביע הראשון והשני.

2) באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה $f(x)=\frac{\sin 2x+1}{2}$,

בתחום $-0.25\pi \le x \le 1.75\pi$.



נעביר משיק AB דרך נקודת המקסימום של הפונקציה, ונעלה אנך לציר ה- x מנקודת החיתוך הראשונה של גרף הפונקציה עם ציר ה- x בתחום הנתון, המסומנת ב-C, כך שנוצר המלבן ABCO.

השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים יסומן ב- S_1 (מקווקו).

השטח הכלוא בין צלעות המלבן, גרף הפונקציה וציר ה- y יסומן ב- S_2 .

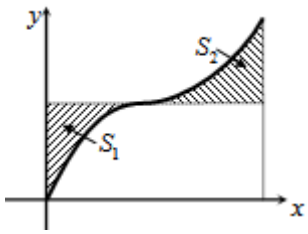
א. מצאו את משוואת הצלע AB של המלבן.

ב. חשבו את היחס $\frac{S_1}{S_2}$.

3) באיור שלהלן נתונה הפונקציה $y=\sin x+x$, בתחום $0\le x\le 2\pi$.

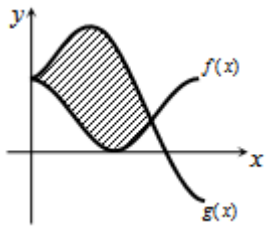
א. האם יש לפונקציה נקודות קיצון פנימיות בתחום הנתון? הוכיחו זאת.

ב. נוריד אנך מגרף הפונקציה לציר ה- x בנקודה שבה $x=2\pi$, ונעביר ישר המקביל לציר ה- x מהנקודה שמאפסת את הנגזרת.
הראו כי השטחים המסומנים בשרטוט, S_1 ו- S_2 , שווים.



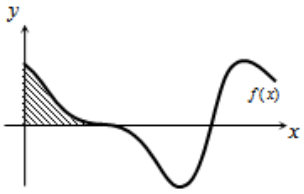
כתב ופתר – גיא סלומון ©

4) באיור שלהלן מתוארים הגרפים של הפונקציות
$f(x)=\cos^2 x$ ו- $g(x)=\sin^2 x+\cos x$, בתחום $0\le x\le \pi$.



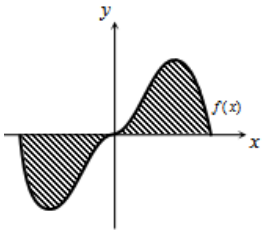
א. מצאו את נקודות החיתוך של הגרפים בתחום הנתון.
ב. חשבו את השטח הכלוא בין שני הגרפים.
השתמשו בזהות $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$.

5) הנגזרת של פונקציה $f(x)$ היא $f'(x)=-\cos 2x-\sin x$.



א. מצאו את שיעורי ה- x של הנקודות המקיימות
$f'(x)=0$, בתחום $0<x<2\pi$.
ידוע כי הנקודה המקיימת $f'(x)=0$, אשר אינה קיצון,
נמצאת על ציר ה- x .
ב. מצאו את הפונקציה $f(x)$.
ג. באיור שלהלן מתואר גרף הפונקציה בתחום הנתון.
חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה והצירים.

6) נתונה הפונקציה $y=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x$.



א. הוכיחו כי נגזרת הפונקציה היא $y'=x^2\sin x$.
באיור שלהלן נתונה הפונקציה $f(x)=x^2\sin x$,
בתחום $-\pi\le x\le \pi$.
ב. הראו כי גרף הפונקציה עובר בראשית הצירים.
ג. חשבו את השטח הכלוא בין גרף הפונקציה וציר ה- x בתחום הנתון.

7) נתונה הפונקציה $f(x)=a\cos x+b\sin x$, כאשר a,b פרמטרים.
הפונקציה חותכת את ציר ה- x בנקודה שבה $x=\frac{\pi}{4}$,
והיא חיובית בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.
גודל השטח הכלוא מתחת לפונקציה בתחום $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ הוא $2\sqrt{2}-2$.
מצאו את ערכי הפרמטרים a ו- b .

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $y=x+2$ ב. π יח"ש.

1) א. $y=1$ ב. $\frac{S_1}{S_2}=\frac{3\pi+2}{3\pi-2}=1.538$

2) א. אין נקודת קיצון, הנקודה (π,π) היא נקודת פיתול.

ב. $S=0.5\pi^2-2=2.934$

3) א. $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{1}{4}\right)$, $(0,1)$ ב. $S=1.5\frac{\sqrt{3}}{2}=1.299$

4) א. $x=\frac{\pi}{2}$, $\frac{7\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$ ב. $f(x)=-\frac{1}{2}\sin 2x+\cos x$ ג. $\frac{1}{2}$ יח"ש.

5) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. $S=2(\pi^2-4)\approx 11.74$.

6) $b=-2$, $a=2$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח – זהויות בטריגו

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\begin{cases}\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\\ \cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1\end{cases}$$

$$\begin{cases}1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\\ 1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)\\ \cos^2\alpha=\dfrac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)\\ \sin\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)\\ \cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\big(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)\end{cases}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 7 - טורים עם איברים קבועים

תוכן העניינים

1. טורים מתכנסים וטורים מתבדרים 31
2. מבחן ההתבדרות של טורים 34
3. מבחני התכנסות לטורים חיוביים 35
4. מבחני התכנסות לטורים כלליים 37
5. התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי 39
6. תרגילי תיאוריה 40

טורים מתכנסים וטורים מתבדרים

שאלות

טור גיאומטרי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-6**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(0.44)^n$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n}{7^{n+1}}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5^n}{4^{n+2}}$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}(-4)\left(\frac{3}{4}\right)^{2n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n+(-5)^n}{7^n}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{3n}}{3^{2n}}$

טור טלסקופי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-11**.
במידה והטור מתכנס, מצאו את סכומו.

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+2)}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n+3)(4n-1)}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

10) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{(\ln n)(\ln(n+1))}$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$

טור הרמוני מוכלל

12) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{5n}$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-2/3}$

ה. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10}{\sqrt[3]{n^4}}$

ו. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^e}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תכונות אלגבריות של טורים

13) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4^n}{7^{n+1}}+n^{-1.5}\right)$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^2}$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

14) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)^2}$, אם ידוע כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

15) מצאו את השבר הרציונלי, שהצגתו העשרונית היא $0.123123123...+0.141414...$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתכנס ל- $\frac{11}{14}$.
2) מתכנס ל- $\frac{1}{3}$.
3) מתבדר.
4) מתכנס ל- $-\frac{64}{7}$.
5) מתכנס ל- $\frac{11}{12}$.
6) מתכנס ל- 8.
7) מתכנס ל- $\frac{1}{2}$.
8) מתכנס ל- $\frac{1}{12}$.
9) מתבדר.
10) $S=\frac{1}{\ln 2}$
11) $\frac{1}{12}$
12) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
ד. מתבדר. ה. מתכנס. ו. מתכנס.
13) א. מתכנס. ב. מתבדר. ג. מתבדר.
14) $\frac{\pi^2}{6}-\frac{5}{4}$
15) $\frac{323}{1221}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן ההתבדרות של טורים

שאלות

1) בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

א. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln n$ ב. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ ג. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin n$

ד. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+1}{n^2+2}$ ה. $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan n$ ו. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{n}\right)^n$

תשובות סופיות

1) א-ו: מתבדר.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחני התכנסות לטורים חיוביים

שאלות

מבחן האינטגרל

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-5** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n^2+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+5}}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\arctan n}{n^2+1}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p>1)$ **5)** $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}\ (p\le 1)$

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}n^2e^{-n^3}$.

ב. מצאו את הגבול $\lim_{n\to\infty}n^2e^{-n^3}$.

מבחן ההשוואה ומבחן ההשוואה הגבולי

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **7-15** (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+10n+1}$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{(n+2)(n+3)(n+4)}$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{\sqrt{n^{10}+n+1}}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+5}{\sqrt{n^4+n+1}}$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-2}{3^n+2n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5\sin^2 n}{n!}$

13) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$ **14)** $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ **15)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ln n}{n^2+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן המנה, מבחן השורש ומבחן רַאבֶּה

בדקו את התכנסות הטורים הבאים (קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר):

16) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$

17) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!(2n)^n}$

19) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+3)!}{n!\cdot3^n}$

20) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$

21) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{1000}e^{-n}$

22) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

23) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(1+n^2)}{n!}$

24) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$

25) $\sum\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$

26) $\sum\frac{(2n)!}{4^n(n!)^2}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתבדר.
3) מתכנס.
4) מתכנס.
5) מתבדר.
6) א. מתכנס. ב. 0
7) מתכנס.
8) מתבדר.
9) מתכנס.
10) מתבדר.
11) מתכנס.
12) מתכנס.
13) מתבדר.
14) מתכנס.
15) מתכנס.
16) מתבדר.
17) מתכנס.
18) מתכנס.
19) מתכנס.
20) מתכנס.
21) מתכנס.
22) מתכנס.
23) מתכנס.
24) מתכנס.
25) מתבדר.
26) מתבדר.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחני התכנסות לטורים כלליים

מבחן לייבניץ

בדקו את התכנסות הטורים בשאלות **1-3**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{4n+1}$ **2)** $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln n}{n}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

מבחן דיריכלה

בשאלות **4** ו-**5**, קבעו אם הטור מתכנס או מתבדר:

4) $1+\frac{1}{4}-\frac{2}{7}+\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\frac{2}{16}+\ldots$

5) $\sum\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n+1}$

6) הוכיחו שהטורים $\sum\cos n\theta,\ \sum\sin n\theta$, כאשר $\theta\neq 2\pi k$, חסומים.

7) הוכיחו את התכנסות הטורים הבאים:
$\sum\frac{\sin n\theta}{\sqrt{n+4}},\quad \sum\frac{\cos n\theta}{n+1},\quad \sum\frac{\sin n\theta}{n}\ (\theta\neq 2\pi k)$.

8) בדקו התכנסות הטור $\sum\frac{\sin^2 n}{n}$.

9) הוכיחו שאם הסדרה b_n יורדת ושואפת לאפס, אז הטור $\sum b_n\sin n$ מתכנס.

10) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}(3-n)(\bmod 7)$ הוא טור חסום.

ב. בדקו את התכנסות הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3-n)(\bmod 7)}{\sqrt{n+1}}$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מבחן אבל

קבעו האם הטור מתכנס או מתבדר:

11) $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+4}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n$

12) $\sum \frac{(-1)^n n}{4^n - 4^{2n}}$

13) $\sum \frac{(-1)^n \ln\left(1+n^{-1}\right)}{n}$

14) $\sum \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan n}{n^2}$

תשובות סופיות

1) מתכנס. **2)** מתכנס. **3)** מתכנס.

4) מתכנס. **5)** מתכנס. **6)** הוכחה.

7) הוכחה. **8)** מתבדר. **9)** הוכחה.

10) א. הוכחה. ב. מתכנס. **11)** מתכנס.

12) מתכנס. **13)** מתכנס. **14)** מתכנס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי

שאלות

בשאלות הבאות, קבעו אם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^n}{n^2}$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n}$

4) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ln n}{n}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^3}$

6) $\sum_{n=2}^{\infty}\left(-\frac{1}{\ln n}\right)^n$

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1+n\ln n}{n^2}$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n^2+n}$

תשובות סופיות

1) מתבדר.
2) מתכנס בהחלט.
3) מתכנס בתנאי.
4) מתכנס בתנאי.
5) מתכנס בהחלט.
6) מתכנס בהחלט.
7) מתכנס בתנאי.
8) מתכנס בתנאי.
9) מתכנס בתנאי.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילי תיאוריה

1) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n$ מתכנס ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

ב. אם $\sum a_n$ מתבדר ו- $\sum b_n$ מתבדר, אז $\sum(a_n+b_n)$ מתבדר.

2) להלן טענות. אם הטענה נכונה, הוכיחו אותה. אם לא, הביאו דוגמה נגדית.

א. אם $\sum a_n^2$ מתכנס, אז $\sum a_n$ מתכנס בהחלט.

ב. אם $\sum a_n$ חיובי ומתכנס, אז $\sum \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

ג. אם $\sum a_n$ מתכנס, אז $\sum a_n^2$ מתכנס.

3) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס, אז $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n+(-1)^n\right)$ מתבדר.

4) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ומתכנס, אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ מתכנס.

5) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum\left(1-\frac{\sin(a_n)}{a_n}\right)$ מתכנס.

6) א. נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ מתבדר.

ב. נתון טור מתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו ש- $\sum |a_n|$ מתבדר אם $\sum a_n^2$ מתבדר.

הערה: אין קשר בין הסעיפים

7) תהי (a_n) סדרה חיובית השואפת לאינסוף.

הוכיחו כי $\sum \frac{1}{(a_n)^n}$ מתכנס.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) $\sum a_n$ הוא טור אי-שלילי ומתכנס.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n+4^n}{a_n+10^n}$ מתכנס.

9) הוכיחו או הפריכו:

אם הסדרה $(a_n)_{n\geq 1}$ מקיימת $0\leq a_n\leq \frac{1}{n}$ לכל n, אז $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

10) נניח כי $a_n\geq 0$.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$ מתכנס.

11) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס והסדרה b_n חסומה, אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ מתכנס.

12) הוכיחו: אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי, אז $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n$ מתבדר.

13) הוכיחו או הפריכו:

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ואם $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$, אז $\sum b_n$ מתכנס בתנאי.

14) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ לכל n, אז הטור מתכנס.

ב. אם מתקיים $\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ לכל n, אז הטור מתבדר.

15) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ מתכנס.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

16) נתונים שני טורים חיוביים $\sum a_n, \sum b_n$.

א. נתון שהטורים $\sum a_n^2, \sum b_n^2$ מתכנסים.

1. הוכיחו כי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

2. הוכיחו כי $\sum (a_n + b_n)^2$ מתכנס.

ב. נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$.

הוכיחו כי $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ מתכנס.

17) הוכיחו:

א. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(na_n) = k \neq 0$, אז הטור מתבדר.

ב. אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\sum (na_n - k)$ מתכנס (כאשר $k \neq 0$),

אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

18) הוכיחו כי אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ חיובי ואם $\lim_{n\to\infty}(n^2 a_n) = k$, אז הטור מתכנס.

19) נתון $a_n \geq 0$ לכל n.

א. נתון כי $\lim_{n\to\infty} n^3 a_n^2 = k > 0$.

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

ב. נתון כי $\sum (n^3 a_n^2 - k)$ מתכנס (כאשר $k > 0$).

הוכיחו כי $\sum \frac{a_n}{\sqrt{n}}$ מתכנס.

20) הסדרה (a_n) מוגדרת על ידי $a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$, $a_2 = -\frac{1}{2}$, $a_1 = \frac{21}{20}$, כאשר $(n \geq 1)$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מוגדר כך: $a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & n = k^2 \\ \frac{1}{n^2} & n \neq k^2 \end{cases}$.

הוכיחו כי הטור מתכנס.

22) נתון טור חיובי ומתכנס $\sum a_n$,

ונתון כי לכל n מתקיים $a_{n+1} \le a_n$.

הוכיחו כי $\sum n(a_n - a_{n+1})$ מתכנס.

23) נתון $\forall n \ge 1:\ 0 < a_n < 1\ ,\ 4a_n(1-a_{n+1}) > 1$.

האם $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 - 1\right)$ מתכנס?

24) נניח כי (a_n) סדרה המקיימת $a_n > 0\ ,\ a_n \le a_{2n} + a_{2n+1}$ לכל n טבעי.

הוכיחו כי $\sum a_n$ מתבדר.

25) (a_n) היא סדרה חשבונית שכל איבריה שונים מאפס.

הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ מתבדר.

26) נתון טור חיובי $\sum a_n$.

הוכיחו או הפריכו:

א. אם הטור מתכנס לפי מבחן השורש, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן המנה.

ב. אם הטור מתכנס לפי מבחן המנה, אז הטור מתכנס גם לפי מבחן השורש.

27) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי הסדרה a_n מתכנסת אם ורק אם $\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n - a_{n-1}\right)$ מתכנס.

ב. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ מתכנסת.

ג. בדקו האם הסדרה $a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$ מתכנסת.

הערה: סעיף ג' מיועד רק למי שלמדו את הנושא **טורי מקלורן עם שארית לגראנז'**.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) פונקציה f מוגדרת לכל x, גזירה ב- 0 ומקיימת $f(0)=0$.
הוכיחו כי אם $\sum a_n$ מתכנס בהחלט, אז $\sum f(a_n)$ מתכנס בהחלט.

29) נתון $p(x)$ פולינום.
$\sum a_n$ מתכנס בהחלט.
הוכיחו כי $\sum P(a_n)$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p(0)=0$.

30) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ טורים חיוביים.
נתון כי:
(1) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס. (2) $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le \frac{b_{n+1}}{b_n}$ לכל n טבעי.
הוכיחו כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

פתרונות לכל שאלות התיאוריה תוכלו למצוא באתר: GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 8 - סדרות פונקציות, טורי פונקציות וטורי חזקות

תוכן העניינים

1. סדרות פונקציות 45
2. טורי פונקציות 48
3. טורי חזקות 50
4. גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות 52

סדרות פונקציות

שאלות

עבור כל אחת מסדרות הפונקציות שבשאלות **1-11**:

א. בדקו התכנסות נקודתית של סדרת הפונקציות.

במידה והסדרה מתכנסת מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב. בדקו התכנסות במידה שווה של סדרת הפונקציות.

1) $f_n(x)=x^n$ ב- $[0,0.5]$.

2) $f_n(x)=x^n$ ב- $(0,1)$.

3) $f_n(x)=\arctan(nx)$ ב- $(0,\infty)$.

4) $f_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$ ב- $[0,1]$.

5) $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+n^2x^2}$ ב- $[0,1]$.

6) $f_n(x)=\dfrac{x^n}{1+x^n}$ ב- $[0.5,4]$.

7) $f_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n}$ ב- $\mathbb{R}$.

8) $f_n(x)=\sqrt{x^2+\dfrac{1}{n}}$ ב- $\mathbb{R}$.

9) $f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{1+x^2+n^2}$ ב- $\mathbb{R}$.

10) $f_n(x)=n(1-x)x^n$ ב- $[0,1]$.

11) $f_n(x)=\begin{cases}0 & 0\le x\le 1-\dfrac{1}{n}\\ n(x-1)+1 & 1-\dfrac{1}{n}\le x\le 1\end{cases}$ ב- $[0,1]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in[n,n+1]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[0,4]$?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[0,4]$?

ג. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ד. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

13) נתונה סדרת הפונקציות $f_n(x)=nxe^{-n^2x^2}$.

א. האם הסדרה מתכנסת נקודתית בקטע $[0,\infty)$?

ב. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[0,\infty)$?

ג. האם הסדרה מתכנסת במ"ש בקטע $[1,\infty)$?

14) נתונה $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & \text{else}\end{cases}$.

א. האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב. האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

15) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=[1-\chi_n(x)]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$,

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right)\\ 0 & else\end{cases}$.

א. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב- $[1,\infty)$?
אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב. מהם ערכי הפרמטר α, עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב- $[1,\infty)$?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

2) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

3) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\frac{\pi}{2}$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

4) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & 0<x\le 1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

5) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

6) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0.5\le x<1\\ \frac{1}{2} & x=1\\ 1 & 1<x\le 4\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

7) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

8) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2}$. ב. מתכנסת במידה שווה.

9) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

10) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

11) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$. ב. לא במידה שווה.

12) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. מתכנסת במידה שווה.

ג. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ד. אינה מתכנסת במידה שווה.

13) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. לא במידה שווה. ג. כן.

14) א. מתכנסת נקודתית לפונקציה $f(x)=0$. ב. אינה מתכנסת במידה שווה.

15) א. לכל ערך של α ממשי יש התכנסות נקודתית בתחום $[1,\infty)$, לפונקציה $\frac{1}{x}$.

ב. רק אם $\alpha<0$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

טורי פונקציות

שאלות

מצאו את תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-6**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!(x-5)^n}$

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)10^n(x-4)^n}$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot\left[\ln(nx)\right]^4}$

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}$

6) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n-1)}$

בדקו התכנסות במידה שווה של הטורים הבאים, בתחום המופיע לידם:

7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$ $\quad(-\infty<x<\infty)$

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\quad(-1\le x\le 1)$

9) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}+x^2}$ $\quad(-\infty<x<\infty)$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{\sqrt{n!}}\left(x^n+x^{-n}\right)$ $\quad\left(\frac{1}{4}\le x\le 4\right)$

11) $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ $\quad(-a\le x\le a)$

12) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2x}{1+n^7x^2}$ $\quad(-\infty<x<\infty)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $x > 0$
2) $x \neq 5$
3) $x < 3\frac{9}{10}$ or $4\frac{1}{10}$
4) $0 < x \neq \frac{1}{n}$
5) $x > 0$
6) $x \neq 0, -1, -2, -3, \ldots$
7) מתכנס במידה שווה.
8) מתכנס במידה שווה.
9) מתכנס במידה שווה.
10) מתכנס במידה שווה.
11) מתכנס במידה שווה.
12) מתכנס במידה שווה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

טורי חזקות

שאלות

מצאו את רדיוס ההתכנסות ואת תחום ההתכנסות של הטורים בשאלות **1-12**:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}$ **2)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}$ **3)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^2}x^n$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin^2\frac{1}{n}$ **5)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n}}$ **6)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^5}{(2n+1)}x^{2n}$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{3^n}(x-1)^n$ **8)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(2n-2)!}x^n$ **9)** $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^n}{n\cdot4^n}$

10) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n(x+5)^n$ **11)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{n^4\cdot100^n}$ **12)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n+1}}{n\cdot2^{2n+1}}$

מצאו את הפיתוח לטור חזקות של הפונקציות הבאות, וקבעו את תחום ההתכנסות:

13) $f(x)=\frac{1}{1+x}$ **14)** $f(x)=\frac{3}{1-x^4}$ **15)** $f(x)=\frac{1}{1+9x^2}$

16) $f(x)=\frac{1}{x-5}$ **17)** $f(x)=\frac{x}{4x+1}$ **18)** $f(x)=\frac{x}{9+x^2}$

19) $f(x)=\frac{3}{x^2+x-2}$ **20)** $f(x)=\frac{7x-1}{3x^2+2x-1}$

<u>הערות חשובות</u>

1. פיתוח לטור חזקות של פונקציות נוספות תמצאו בפרק 3 שאלה 1.
2. לפתרון תרגילים 19 ו-20, יש להכיר את הנושא 'פירוק לשברים חלקיים'.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-1 \le x < 1\ ,\ R = 1$

2) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

3) $-0.2 \le x \le 0.2\ ,\ R = 0.2$

4) $-1 \le x \le 1\ ,\ R = 1$

5) $-3 < x \le -1\ ,\ R = 1$

6) $-1 < x < 1\ ,\ R = 1$

7) $x = 1\ ,\ R = 0$

8) $-\infty < x < \infty\ ,\ R = \infty$

9) $-5 < x \le 3\ ,\ R = 4$

10) $-\frac{19}{3} < x < -\frac{11}{3}\ ,\ R = 4/3$

11) $-9 \le x \le 11\ ,\ R = 10$

12) $-7 < x < -3\ ,\ R = 2$

13) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$

14) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$

15) $(|x|<\frac{1}{3})\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$

16) $(|x|<5)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$

17) $(|x|<\frac{1}{4})\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$

18) $(|x|<3)\ \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$

19) $(|x|<1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$

20) $(|x|<\frac{1}{3})\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

גזירה ואינטגרציה של טורי חזקות

שאלות

פתחו לטור חזקות את הפונקציות בשאלות **1-7**:

1) $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

2) $f(x)=\ln(1+x)$

3) $f(x)=\ln(1-x)$

4) $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

5) $f(x)=\ln(5-x)$

6) $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$

7) $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

8) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2}{4^n}$.

9) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2+n\right)x^{n-1}$.

10) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

ב. מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4^n(2n-1)}$?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-3}}{4n-3}$.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4^{2n}(4n-3)}$.

12) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{4n}(4n-1)}$.

13) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$.

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

5) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

8) $\frac{20}{27}$

9) $\frac{2}{(1-x)^3}$ $|x|<1$

10) א. $|x|<1$ $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ ב. $\frac{1}{4}\ln 3$

11) א. $|x|<1$ $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+\frac{1}{2}\arctan x$ ב. $\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\ln 3+\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}\right)$

12) $\frac{1}{10}\left(\frac{1}{4}\ln\frac{11}{9}-\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{10}\right)$

13) $|x|\le 1$ $\arctan x$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 9 - טורי טיילור - מקלורן

תוכן העניינים

1. טור טיילור וטור מקלורן 54
2. נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות 56

טור טיילור וטור מקלורן

שאלות

בשאלות **1-24** מצאו את הפיתוח לטור טיילור סביב $x=0$ (טור מקלורן) :

1) $f(x)=\sin 2x$ **2)** $f(x)=x^2e^{-4x}$ **3)** $f(x)=\sinh x$

4) $f(x)=\sin^2 x$ **5)** $f(x)=\cos^2 x$ **6)** $f(x)=2^x$

7) $f(x)=x\cos(4x^2)$ **8)** $f(x)=\ln(2-3x+x^2)$ **9)** $f(x)=\arcsin x$

10) $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **11)** $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$ **12)** $f(x)=\dfrac{1}{1+9x^2}$

13) $f(x)=\dfrac{1}{x-5}$ **14)** $f(x)=\dfrac{x}{4x+1}$ **15)** $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

16) $f(x)=\dfrac{3}{x^2+x-2}$ **17)** $f(x)=\dfrac{7x-1}{3x^2+2x-1}$ **18)** $f(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}$

19) $f(x)=\ln(1+x)$ **20)** $f(x)=\ln(1-x)$ **21)** $f(x)=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$

22) $f(x)=\ln(5-x)$ **23)** $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-2x)^2}$ **24)** $f(x)=\arctan\left(\dfrac{x}{3}\right)$

הערות : לפתרון שאלות **15** ו-**16**, יש להכיר את הנושא פירוק לשברים חלקיים.
לפתרון סעיפים **18**, **19**, **23** ו-**24** יש להכיר את הנושא גזירה ואינטגרציה של טורי מקלורן.
אפשר להיעזר בפיתוחים הידועים לטור מקלורן המופיעים בנספח.

בשאלות **25-27** מצאו את ארבעת האיברים הראשונים, השונים מאפס,
בפיתוח לטור מקלורן של הפונקציות (נדרש ידע בכפל וחילוק של פולינומים) :

25) $f(x)=e^{-x^2}\cos x$ **26)** $f(x)=\tan x$ **27)** $f(x)=\dfrac{\sin x}{e^x}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n x^{n+2}}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

3) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

5) $\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

6) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n x^n}{n!}$ $(-\infty<x<\infty)$

7) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^{2n}x^{4n+1}}{(2n)!}$ $(-\infty<x<\infty)$

8) $\ln 2-\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2^{n+1}}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

9) $x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ $(-1<x<1)$

10) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$ $(|x|<1)$

11) $\sum_{n=0}^{\infty}3x^{4n}$ $(|x|<1)$

12) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 9^n x^{2n}$ $(|x|<\frac{1}{3})$

13) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{5^{n+1}}x^n$ $(|x|<5)$

14) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{n+1}$ $(|x|<\frac{1}{4})$

15) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{9^{n+1}}$ $(|x|<3)$

16) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)x^n$ $(|x|<1)$

17) $\sum_{n=0}^{\infty}\left(2(-1)^n-3^n\right)x^n$ $(|x|<\frac{1}{3})$

18) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot n\cdot x^{n-1}$ $(|x|<1)$

19) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ $(-1<x\le 1)$

20) $\sum_{n=0}^{\infty}-\frac{x^{n+1}}{n+1}$ $(-1\le x<1)$

21) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2x^{2n+1}}{2n+1}$ $(|x|<1)$

22) $\ln 5-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+1)}$ $(-5\le x<5)$

23) $\sum_{n=0}^{\infty}2^n(n+1)x^{n+2}$ $(|x|<\frac{1}{2})$

24) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{3^{2n+1}(2n+1)}$ $(|x|\le 3)$

25) $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{25}{24}x^4-\frac{331}{720}x^6+..$

26) $x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\ldots$

27) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{30}x^5+..$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נוסחאות – טורי מקלורן של פונקציות חשובות

טור מקלורן	תחום התכנסות
$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x^1}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$	$-\infty<x<\infty$
$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\dots$	$-1<x\le 1$
$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\dots$	$-1\le x\le 1$
$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x^1+x^2+x^3+\dots$	$-1<x<1$
$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n$ $=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\dots$	$-1\le x\le 1\ (m>0)$ $-1<x\le 1\ (-1<m<0)$ $-1<x<1\ (m\le -1)$ $m\ne 0,1,2,3,\dots$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 10 - משוואות מסדר ראשון

תוכן העניינים

1. מבוא ..... (ללא ספר)
2. הפרדת משתנים 57
3. משוואה הומוגנית 59
4. משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$ 61
5. משוואה מדויקת 62
6. גורם אינטגרציה 64
7. משוואה לינארית מסדר ראשון 67
8. משוואת ברנולי 69
9. משוואת ריקטי 70
10. הצבות שונות ומשונות 71
11. משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד 72
12. פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון 75
13. משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה 77

הפרדת משתנים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2}{y} \quad (y\neq 0)$

2) $(1-x)y'=y^2$

3) $yy'\sqrt{1+x^2}+x\sqrt{1+y^2}=0$

4) $(x-1)\frac{dy}{dx}=4y \quad ; \quad y(2)=1$

5) $\frac{dy}{dx}=xy+3y-3x-9 \quad ; \quad y(1)=-1$

6) $\left(x^2y-2+2x^2-y\right)dx-\left(xy^2-4-4x+y^2\right)dy=0$

7) $dy=2t\left(y^2+4\right)dt$

8) $\frac{dx}{dt}=x^2-2x+2$

9) $y'+y^2\sin x=0 \quad ; \quad y(\pi)=1$

10) $\frac{dy}{dx}=y\sec^2 x \quad ; \quad y(0)=5 \qquad (\cos x\neq 0)$

11) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}} \quad ; \quad y(0)=1$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=\pm\sqrt{\frac{2}{3}x^3+k}$

2) $y=\frac{1}{\ln|1-x|-c},\quad y=0$

3) $\sqrt{1+y^2}=-\sqrt{1+x^2}+c$

4) $\frac{1}{4}\ln|y|=\ln|x-1|$

5) $\ln|y-3|=\frac{x^2}{2}+3x+\ln 4-3.5$

6) $y=2\pm\sqrt{(x-1)^2+k}$

7) $y=2\tan\left(2t^2+k\right)$

8) $x=1+\tan(t+c)$

9) $y=-\frac{1}{\cos x}$

10) $\ln|y|=\tan x+\ln 5$

11) $\frac{1}{-2y^2}=\sqrt{1+x^2}-1.5$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה הומוגנית

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-8**:

1) $\left(y^3+x^3\right)dx+xy^2dy=0$

2) $y'=\dfrac{4y-3x}{2x-y}$

3) $y^2+x^2y'=xyy'$

4) $\left(3xy+y^2\right)dx+\left(x^2+xy\right)dy=0$

5) $\left(x-y\cos\dfrac{y}{x}\right)dx+x\cos\dfrac{y}{x}dy=0$

6) $y'=\dfrac{2xye^{(x/y)^2}}{y^2+y^2e^{(x/y)^2}+2x^2e^{(x/y)^2}}$

7) $y(1)=0\ ;\ \left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0$

8) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

9) נתונה המשוואה $\left(y^2+x^2\right)dx+xy^ndy=0$.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע n, על מנת שהמשוואה תהיה הומוגנית?

ב. פתרו את המשוואה עבור הערך של n שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $-\ln|x| = \frac{1}{6}\ln\left|2(y/x)^3+1\right| + c\,, \qquad y = -\frac{x}{2^{1/3}}$

2) $\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|(y/x)-1\right| - \frac{5}{4}\ln\left|(y/x)+3\right| + c\,, \quad y = x,\ \ y = -3x$

3) $-\ln|x| = \ln\left|(y/x)\right| - (y/x) + c, \quad y = 0$

4) $-\ln|x| = \frac{1}{4}\ln\left|2(y/x)^2+4\right| + c, \quad y = 0, \quad y = -2x$

5) $\ln|x| = -\sin(y/x) + c$

6) $\ln\left(1+e^{(x/y)^2}\right) = \ln|y| + c, \qquad y = 0$

7) $\ln x = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + c$

8) $\ln|t| = -\frac{1}{2}\ln\left|(x/t)-(x/t)^2\right| + c, \quad x(t) = 0, \quad x(t) = t$

9) $n = 1, \quad \ln|x| = -\frac{1}{4}\ln\left(1+2(y/x)^2\right) + c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מהצורה $(ax+by+c)dx+(dx+ey+f)dy=0$

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x+y+1}{x+y+2}$

2) $(x+2y+3)dx+(2x+4y-1)dy=0$

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$

4) $\frac{dx}{dy}=\frac{3+x+2y}{1+x+y}$

5) $(2x+y-3)dx+(x+y-1)dy=0$

תשובות סופיות

1) $x=\frac{1}{2}(x+y+1)+\frac{1}{4}\ln\left(2(x+y+1)+1\right)+\frac{1}{4}+c,\quad y=-x-1.5$

2) $\ln|x-1|=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}-1\right|-\frac{3}{2}\ln\left|\frac{y+2}{x-1}+1\right|+c\ \ ,y=x-3\ \ ,\ \ y=-x-1$

3) $0=14y-(x+2y+3)^2+k$

4) $\ln|x-1|=\frac{1}{4}\left[-\left(2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}-2\frac{y+2}{x-1}\right|+\left(-2+\sqrt{2}\right)\ln\left|\sqrt{2}+2\frac{y+2}{x-1}\right|\right]+c$

$y=\sqrt{0.5}x-2-\sqrt{0.5}\ ,\ y=-\sqrt{0.5}x-2+\sqrt{0.5}$

5) $\ln|x-2|=\frac{1}{2}\ln\left(2+2\frac{y+1}{x-2}+\left(\frac{y+1}{x-2}\right)^2\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה מדויקת

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-6**:

1) $\left(2x^3+3y\right)dx+\left(3x+y-1\right)dy=0$

2) $\left(y^2e^{xy^2}+4x^3\right)dx+\left(2xye^{xy^2}-3y^2\right)dy=0$

3) $\left(y\cos x+2xe^y\right)dx+\left(\sin x+x^2e^y-1\right)dy=0$

4) $\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 x\,dy=0$

5) $\left(y^2-\dfrac{y}{x(x+y)}+2\right)dx+\left(\dfrac{1}{x+y}+2y(x+1)\right)dy=0$

6) $\left(2x^2t-2x^3\right)dt+\left(4x^3-6x^2t+2xt^2\right)dx=0$

7) נתונה המשוואה $\left(3x^2+ye^{xy}\right)dx+\left(2y^3+kxe^{xy}\right)dy=0$, כאשר k קבוע.

א. מה צריך להיות הערך של הקבוע k, על מנת שהמשוואה תהיה מדויקת?

ב. פתור את המשוואה עבור הערך של k שנמצא בסעיף א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^4+3yx+0.5y^2-y=c$

2) $e^{xy^2}+x^4-y^3=c$

3) $y\sin x+x^2e^y-y=c$

4) $x-\frac{y^2\cos 2x}{2}-\frac{y^2}{2}=c$

5) $\ln|x+y|+(x+1)y^2+2x-\ln|x|=c$

6) $x^2t^2-2x^3t+x^4=c$

7) $k=1,\ \ x^3+e^{xy}+\frac{y^4}{2}=c$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

גורם אינטגרציה

שאלות

1) הראו שהמשוואה $x^2y^3+x\left(1+y^2\right)y'=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה $\frac{1}{xy^3}$.

2) הראו שהמשוואה $\left(\frac{\sin y}{y}-2e^{-x}\sin x\right)dx+\left(\frac{\cos y+2e^{-x}\cos x}{y}\right)dy=0$
אינה מדויקת, ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה ye^x.

3) הראו שהמשוואה $(x+2)\sin ydx+x\cos ydy=0$ אינה מדויקת,
ופתרו אותה בעזרת גורם האינטגרציה xe^x.

פתרו את המשוואות בשאלות **4-9**:

4) $\left(x^2+y^2+x\right)dx+(xy)dy=0$

5) $\left(x-x^2-y^2\right)dx+ydy=0$

6) $\left(2xy^3+y^4\right)dx+\left(xy^3-2\right)dy=0$

7) $\left(y^2-y\right)dx+xdy=0$

8) $\left(y-xy^2\right)dx+\left(x+x^2y^2\right)dy=0$

9) $y'=\frac{3yx^2}{x^3+2y^4}$; $y(1)=-1$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

10) נתונה מד"ר לא מדויקת $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{N}=f(x)$, אז $e^{\int f(x)dx}$ הוא גורם אינטגרציה.

ב. הוכיחו: אם $\frac{M_y-N_x}{M}=g(y)$, אז $e^{-\int g(y)dy}$ הוא גורם אינטגרציה.

11) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(y^4-4xy)dx+(2xy^3-3x^2)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של xy בלבד.
כלומר, גורם האינטגרציה מהצורה $\mu(xy)$.

12) נתונה המשוואה $(5x^2+3y^3+2xy)dx+(3x^2+3xy^2+6y^3)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה, בהנחה שהוא מהצורה $\mu(x+y)$.

13) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $\frac{x}{y}$ בלבד.

14) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $(x^2y^3)dx+(x+xy^2)dy=0$.
מצאו את גורם האינטגרציה של המשוואה, בהנחה שהוא פונקציה של $x^\alpha y^\beta$.
כלומר, גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x^\alpha y^\beta)$.

15) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.

א. מצאו תנאי על המשוואה, על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה שהוא פונקציה של xy בלבד.

ב. היעזרו בסעיף א' על מנת למצוא את גורם האינטגרציה של המשוואה $(y-xy^2\ln x)dx+xdy=0$.

16) נתונה המשוואה הדיפרנציאלית $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$.
מצאו תנאי על המשוואה על מנת שיהיה לה גורם אינטגרציה
שהוא פונקציה של $x+y$ בלבד.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $0.5x^2+\frac{y^{-2}}{-2}+\ln|y|=c$

2) $e^x\sin y+2y\cos x=c$

3) $\sin y\cdot e^x\cdot x^2=c$

4) $0.25x^4+0.5x^2y^2+\frac{x^3}{3}=c$

5) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right)-x=c$

6) $x^2+xy+\frac{1}{y^2}=c$

7) $x-\frac{x}{y}=c$

8) $-\ln x-\frac{1}{xy}+y=c$

9) $-\frac{x^3}{y}+\frac{2y^3}{3}=\frac{1}{3}$

10) שאלת הוכחה.

11) $\mu(xy)=(xy)^2$

12) $\mu(x+y)=(x+y)^2$

13) $\text{if: } \frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}=h\left(x/y\right) \quad \text{then: I.F.: } \mu=e^{\int\frac{y^2\left(M_y-N_x\right)}{yN+xM}}$

14) $\mu=\frac{1}{xy^3}$

15) א. $\text{if : } \frac{M_y-N_x}{yN-xM}=h(xy) \quad \text{then: I.F. : } \mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{yN-xM}}$ ב. $\mu=\frac{1}{x^2y^2}$

16) $\text{if : } \frac{M_y-N_x}{N-M}=h(x+y) \quad \text{then:I.F.: } \mu=e^{\int\frac{M_y-N_x}{N-M}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות ליניאריות מסדר ראשון

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $\frac{dy}{dx}+2xy=4x$

2) $xy'=y+x^3+3x^2-2x$

3) $(x-2)y'=y+2(x-2)^3 \quad (x>2)$

4) $x^3y'+(2-3x^2)y=x^3 \quad (x>0)$

5) $\frac{dy}{dt}+y=2+2t \;;\; y(0)=1$

6) $\frac{dy}{dx}+y\cot x=5e^{\cos x} \quad (\sin x>0)$

7) $y'-2y\cot x=1 \quad (\sin x>0)$

8) $x^2z'+2xz=\cos x \;;\; z(\pi)=0$

9) $ydx=(2x+y^3)dy$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = 2 + C \cdot e^{-x^2}$

2) $y = x\left[\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + C\right]$

3) $y = (x-2)\left[x^2 - 4x + C\right]$

4) $y = \frac{1}{2}x^3 + C \cdot x^3 e^{\frac{1}{x^2}}$

5) $y = 2t + e^{-t}$

6) $y = \frac{1}{\sin x}\left[-5e^{\cos x} + C\right]$

7) $y = \sin^2 x\left[-\cot x + C\right]$

8) $z = \frac{\sin x}{x^2}$

9) $x(y) = y^2(y + c)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת ברנולי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x^2y'+2xy-y^3=0$

2) $\left(x^2+1\right)y'-2xy-y^2=0$

3) $x\frac{dy}{dx}-2y=x^2y^{1/2}$

4) $y'-\left(\frac{1}{x}+5x^4\right)y=-x^3y^2 \quad ; \quad y(1)=2.5$

5) $z'-\cot x\cdot z=\frac{1}{\sin x}z^3 \qquad (\sin x\neq 0)$

תשובות סופיות

1) $y=\pm\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{5x}+c\cdot x^4}}$

2) $y=\frac{x^2+1}{-x+C}$

3) $y=x^2\left(\frac{x}{2}+C\right)^2$

4) $y=\frac{5xe^{x^5}}{e^{x^5}+e}$

5) $z=\pm\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos x+C}}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת ריקטי

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y' = e^{2x} + \left(1 + \frac{5}{2}e^{x}\right)y + y^2$

2) $y' = 1 + (x - y)^2$

3) $y' = 1 + x + 2x^2\cos x - (1 + 4x\cos x)y + 2y^2\cos x$

תשובות סופיות

1) $y(x) = -0.5e^{x} + \dfrac{e^{x}}{-\frac{2}{3} + Ce^{-1.5x}}$

2) $y(x) = x + \dfrac{1}{-x + C}$

3) $y(x) = x + \dfrac{1}{\cos x - \sin x + Ce^{x}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצבות שונות ומשונות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y' = \cos(y - x)$

2) $y' = \frac{2y}{x} + \cos\left(\frac{y}{x^2}\right);\ y(1) = 0$

3) $y' - x^2 y + y^2 = x - \frac{x^4}{4},\ \ y(0) = 1$

תשובות סופיות

1) $-\frac{1}{\sin z} + c$

2) $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin z}{1-\sin z}\right)$

3) $y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x+1}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט הקיום והיחידות על שם פיאנו ופיקארד

שאלות

1) נתונה הבעיה $y'=-\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+y}$, $y(2)=-1$.

א. הוכיחו ש- $y_1(x)=-x+1,\quad y_2(x)=-\frac{1}{4}x^2$ הם פתרונות לבעיה.
קבעו באיזה תחום תקף כל אחד מהפתרונות.

ב. הסבירו מדוע קיום שני פתרונות לא סותר את משפט היחידות.

2) נתונה הבעיה $y'=\sqrt[3]{y}+4$, $y(0)=0$.

א. הוכיחו שהבעיה מקיימת את תנאי משפט הקיום.

ב. הוכיחו שהבעיה אינה מקיימת את תנאי היחידות.

ג. הוכיחו שלבעיה קיים פתרון יחיד, ומצאו אותו.

3) פתרו את הבעיה $y'=\left(x^2+y^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)+x^2\sin y$, $y(4)=0$.

4) נתונה הבעיה $y'=(y-1)\left(x^2+y\right)^5$, $y(0)=4$.

א. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח חסום מלמטה.

ב. הראו שכל פתרון של הבעיה בהכרח עולה בתחום הגדרתו.

5) נתונה המד"ר $ydx=\left(2x+y^3\right)dy$.

א. הראו שעבור $x=x(y)$ המד"ר ליניארית מסדר ראשון,
ופתרו אותה ככזאת.

ב. קבעו, על פי משפט הקיום והיחידות למד"ר ליניארית,
מהן נקודות ההתחלה (x_0,y_0), כך שלמד"ר הנתונה קיים פתרון יחיד,
העובר דרך (x_0,y_0).
צטטו את המשפט עבור המד"ר הליניארית שקיבלתם.
מהו הקטע הארוך ביותר שבו קיים פתרון יחיד העובר דרך (x_0,y_0)?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתונה בעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו 3 קירובי פיקארד לפתרון הבעיה.

ב. מצאו צורה כללית לקירוב פיקארד מסדר n (הוכיחו באינדוקציה).

ג. פתרו את המד"ר ישירות, והראו כי קירוב פיקארד מסדר n מתכנס לפתרון כאשר $n \to \infty$.

7) כמה פתרונות יש לבעיית ההתחלה $\begin{cases} y' = \frac{1}{x}|\sin y| \\ y(1) = \pi \end{cases}$ $(x > 0)$?

8) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = 5 + 5y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

9) נתונה בעיית התחלה $\begin{cases} y' = -\frac{x}{y} \quad (y > 0) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

א. מצאו קטע כלשהו שבו לבעיה קיים פתרון יחיד.

ב. מצאו את הקטע הגדול ביותר, שבו משפט הקיום והיחידות יודע להגיד שקיים פתרון יחיד.

ג. הראו, על ידי חישוב ישיר, שקיים קטע גדול יותר מהקטע שנמצא בסעיף ב', בו קיים לבעיה פתרון יחיד.

10) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x + \sin y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

11) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = x \cdot \sin xy \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

12) הראו כי לבעיה $\begin{cases} y' = xye^{-y^2} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ יש פתרון יחיד על כל הישר הממשי.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הסבר.

2) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. שאלת הוכחה.

3) $y(x)=0$

4) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה.

5) א. ראו שאלה אחרונה בנושא 'מד"ר ליניארית מסדר ראשון'.

ב. כל נקודת התחלה (x_0,y_0), שעבורה $y_0\neq 0$.

הקטע הארוך ביותר: $(0,\infty)$ או $(-\infty,0)$.

6) א. $y_0(x)=1,\quad y_1(x)=1+x^2,\quad y_2(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!},\quad y_3(x)=1+\frac{x^2}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}$

ב. $y_n(x)=1+x^2+\frac{x^4}{2!}+\frac{x^6}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{n!}$ ג. הוכחה.

7) אחד.

8) א. $[-0.08,0.08]$ ב. $[-0.1,0.1]$ ג. הוכחה.

9) א. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$ ב. $[-0.5,0.5]$ ג. הוכחה.

10) הוכחה.

11) הוכחה.

12) הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

פתרונות גרפיים ונומריים למשוואה מסדר ראשון

שאלות

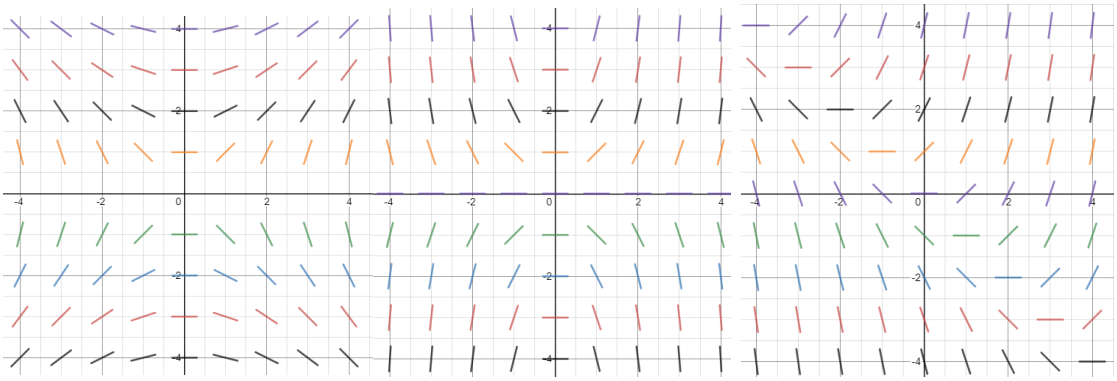
1) שרטטו שדה כיוונים למשוואה הדיפרנציאלית $y'=2y-x$.

2) התאימו כל אחת מהמשוואות שבסעיפים א'-ג' לשדה הכיוונים שלה:

א. $y'=\frac{x}{y}$

ב. $y'=xy$

ג. $y'=x+y$



איור 1 איור 2 איור 3

3) נתונה המד"ר $y'=y-x$, $y(0)=2$.

מצאו בקירוב את $y(1)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.1$.

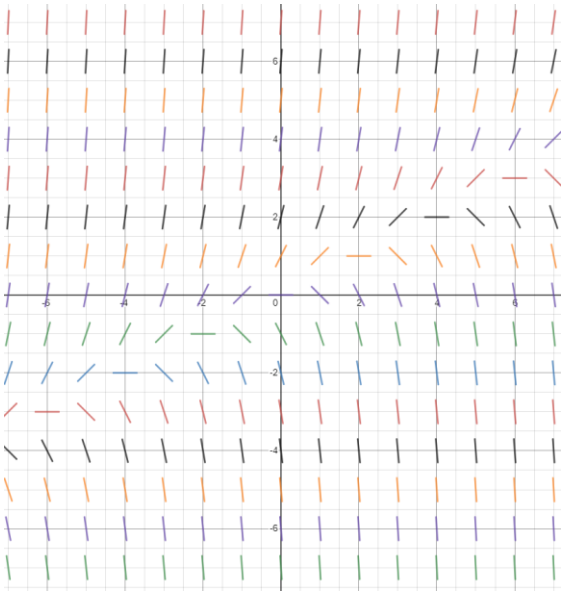
4) נתונה המד"ר $y'=x+y$, $y(1)=2$.

מצאו בקירוב את $y(2)$ בעזרת שיטת אוילר עם $h=0.2$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1)



2) איור 1 – סעיף ג', איור 2 – סעיף ב', איור 3 – סעיף א'.

3) $y(1)=4.593$

4) $y(2)=6.95328$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואות מסדר ראשון וממעלה גבוהה

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

הערת סימון: בתת-פרק זה נסמן $p = y' = \frac{dy}{dx}$.

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $4x^2p^2 - 4x^2p - 2xy - y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

2) $x^2p^2 + xyp - 6y^2 = 0$ $\quad (p = y')$

3) $xyp^2 + \left(x^2 + xy + y^2\right)p + x^2 + xy = 0$ $\quad (p = y')$

4) $y = 2px + p^4x^2$ $\quad (p = y')$

5) $xp^2 - 2yp + 4x = 0$ $\quad (p = y')$

6) $6p^2y^2 + 3px - y = 0$ $\quad (y > 0)$ $\quad (p = y')$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\left(y-2x-\sqrt{x}\cdot c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+\frac{1}{2}\ln|x|-c_2\right)=0$

2) $\left(\ln|y|-2\ln|x|-c_1\right)\cdot\left(\ln|y|+3\ln|x|-c_2\right)=0$

3) $\left(y+0.5x-\frac{c_1}{x}\right)\cdot\left(\frac{y^2}{2}+\frac{x^2}{2}-c_2\right)=0,\quad x>0$

4) $y=\pm 2\sqrt{cx}+c^2$

5) $y=\frac{1}{2}cx^2+\frac{2}{c}$

6) $6\left(\frac{c}{y^2}\right)^2 y^2+3\left(\frac{c}{y^2}\right)x-y=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 11 - משוואות ליניאריות מסדר שני

תוכן העניינים

1. משוואה חסרה - שיטת הורדת סדר המשוואה 79
2. משוואה לינארית, הומוגנית, עם מקדמים קבועים 81
3. השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל" 83
4. השוואת מקדמים בשיטת "המרשם" 85
5. וריאציית פרמטרים 87
6. משוואה לינארית, עם מקדמים לא קבועים - משוואת אוילר ..... (ללא ספר)
7. משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל 88
8. הוורונסקיאן ושימושיו 89
9. משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני 91
10. השיטה האופרטורית 92

משוואה חסרה – שיטת הורדת סדר המשוואה

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $x^2y''+xy'=\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$

2) $y''\tan x-1=y'$ $(\cos x\neq 0)$

3) $2xy'y''-(y')^2+1=0$

4) $y''x\ln x=y'$

5) $xy''=x^2e^x+y'$

6) $yy''+(y')^2=0$

7) $2y''y-(y')^2=1$

8) $y''\tan y=2(y')^2$ $(\cos y\neq 0)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y=\frac{1}{x}+C_1\cdot\ln x+C_2$

2) $y=-x+C_1\cdot\cos x+C_2$

3) $y=\pm\frac{2}{3C_1}\left(C_1x+1\right)^{3/2}+C_2;\ y=\pm x+C_3$

4) $y=C_1\left(x\ln x-x\right)+C_2;\ y=C_3$

5) $y=e^x\left(x-1\right)+C_1\frac{x^2}{2}+C_2$

6) $\frac{y^2}{2}=cx+k\ \ ;\ \ y=c$

7) $y=\frac{1}{c}\left[\frac{c^2\left(x+k\right)^1}{4}+1\right]$

8) $\cot y=-\left(cx+k\right)\ \ ;\ \ y=c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה לינארית הומוגנית, עם מקדמים קבועים

שאלות

פתרו את המשוואות בשאלות **1-11**:

1) $y''-100y=0$

2) $y''-4y'=0$

3) $y''-8y'+7y=0$

4) $z(0)=1\,,\ z'(0)=1,\ 4z''+z'-5z=0$

5) $y''-2y'+y=0$

6) $4\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}+4\frac{\partial x}{\partial t}+x(t)=0$

7) $y''+4y=0$

8) $y''+10y'+125y=0$

9) $y(0)=0,\ \ y'(0)=3\,;\ y''-2y'+10y=0$

10) $5y''+8y'+4y=0$

11) $\begin{cases} y''(x)-\frac{1}{a^2}y(x)=0 & (a>0) \\ y(0)=4 \\ y(\infty)=y(-\infty)=0 \end{cases}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתונה המד"ר $yy''+(y')^2=0$.

א. הראו כי $y_1=4$ ו- $y_2=\sqrt{x}$ הם פתרונות של המד"ר.

ב. הראו כי הפתרון $z(x)=y_1(x)+y_2(x)$, אינו פתרון של המד"ר.
האם יש בכך סתירה לעקרון הסופרפוזיציה?

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{10x}+c_2e^{-10x}$

2) $y=c_1+c_2e^{4x}$

3) $y=c_1e^{x}+c_2e^{7x}$

4) $z=e^{x}$

5) $y=c_1e^{x}+c_2xe^{x}$

6) $x(t)=c_1e^{\frac{-t}{2}}+c_2te^{\frac{-t}{2}}$

7) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$

8) $y=e^{-5x}\left[c_1\cos 10x+c_2\sin 10x\right]$

9) $y=e^{2}\sin 3x$

10) $y=e^{\frac{-4x}{5}}\left[c_1\cos\left(\frac{2}{5}x\right)+c_2\sin\left(\frac{2}{5}x\right)\right]$

11) $y=4e^{-\frac{|x|}{a}}$

12) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השוואת מקדמים בשיטת "הניחוש המושכל"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y(0)=2,\ \ y'(0)=7;\ \ \ y''-2y'+y=e^{2x}$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''-3y'+2y=2x^2+e^x+2xe^x+4e^{3x}$

8) $y''+3y'=9x$

9) $y''-3y'+2y=e^x$

10) $y''-2y'=6x^2-2x$

11) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} + x^2 + 2x - 2$

2) $y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$

3) $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y = c_1 e^{-\sqrt{2}x} + c_2 e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$

5) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + \frac{3}{10} e^{2x}\cos x + \frac{3}{5} e^{2x}\sin x$

6) $z = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \frac{1}{2} x\cos x$

7) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2 e^x - 3xe^x + 2e^{3x}$

8) $y = c_1 + c_2 e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$

9) $y = c_1 e^x + c_2 e^{2x} - xe^x$

10) $y = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-2x} - x^2 - x - x^3$

11) $x = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + te^{-2t}$

12) $y = e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

השוואת מקדמים בשיטת "המרשם"

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+5y'+6y=22x+6x^2$

2) $y''-2y'+y=e^{2x}$ $\quad y(0)=2,\ \ y'(0)=7;$

3) $y''-y'-2y=4\sin 2x$

4) $y''-2y=xe^{-x}$

5) $y''-y=3e^{2x}\cos x$

6) $z''+z=\sin x$

7) $y''+3y'=9x$

8) $y''-3y'+2y=e^{x}$

9) $y''-2y'=6x^2-2x$

10) $x''+5x'+6x=e^{-t}+e^{-2t}$

11) $y''-3y'+2y=2x^2+e^{x}+2xe^{x}+4e^{3x}$

12) $y''+2y'+5y=e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} + x^2 + 2x - 2$

2) $y = e^x + 4xe^x + e^{2x}$

3) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{5}\sin 2x - \frac{3}{5}\cos 2x$

4) $y = c_1e^{-\sqrt{2}x} + c_2e^{\sqrt{2}x} + (2-x)e^{-x}$

5) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{x} + \frac{3}{10}e^{2x}\cos x + \frac{3}{5}e^{2x}\sin x$

6) $z = c_1\cos x + c_2\sin x - \frac{1}{2}x\cos x$

7) $y = c_1 + c_2e^{-3x} + \frac{3}{2}x^2 - x$

8) $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} - xe^{x}$

9) $y = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x} - x^2 - x - x^3$

10) $x = c_1e^{-2t} + c_2e^{-3t} + \frac{1}{2}\cdot e^{-t} + te^{-2t}$

11) $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x} + x^2 + 3x + 3.5 - x^2e^{x} - 3xe^{x} + 2e^{3x}$

12) $y = e^{-x}\sin 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

וריאציית פרמטרים

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1) $y''+y=\frac{1}{\sin x}$

2) $y''+4y'+4y=e^{-2x}\ln x$

3) $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$

4) $y''-2y'+y=\frac{e^x}{x}$; $y(1)=0\,,\ y'(1)=0$

5) $y''-3y'+2y=\frac{1}{1+e^{-x}}$

6) $y''+4y=\sec 2x$

תשובות סופיות

1) $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\cos x\cdot x+\sin x\cdot\ln|\sin x|$

2) $y=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}-e^{-2x}\frac{x^2}{2}\left[\ln x-\frac{1}{2}\right]+x^2e^{-2x}\left[\ln x-1\right]$

3) $y=c_1e^{-x}+c_2xe^{-x}-e^{-x}\left[\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^5}{5}-\frac{6\left(\sqrt{x+1}\right)^3}{3}\right]+xe^{-x}\left[2(x+1)^{3/2}\right]$

4) $y=e^x-xe^x+xe^x\ln x\quad(x>0)$

5) $y=c_1e^x+c_2e^{2x}+e^x\ln\left(1+e^{-x}\right)+e^{2x}\left[\ln\left(1+e^{-x}\right)-\left(1+e^{-x}\right)\right]$

6) $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x+\frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|+\sin 2x\cdot x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואה לינארית כללית, שיטת הפתרון השני, שיטת אבל

שאלות

1) פתרו $y''+\tan x\cdot y'-(2\tan x+4)y=0$, כאשר ידוע $y_1(x)=e^{2x}$.

2) פתרו $(1-x^2)y''+2xy'-2y=0$.

3) הסבירו את שיטת "הפתרון השני" לפתרון מד"ר לינארית, כללית, לא הומוגנית, מסדר שני. הדגימו על המד"ר:

$$(1-x)y''+x\cdot y'-y=2(1-x)^2e^{-x},\quad (0<x<1),$$

כאשר ידוע ש- $y_1(x)=e^x$, פתרון של המד"ר ההומוגנית המתאימה.

תשובות סופיות

1) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}(\sin x-4\cos x)$

2) $y=c_1x+c_2(x^2+1)$

3) שאלת הדגמה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הוורונסקיאן ושימושיו

שאלות

1) האם ייתכן כי $y_1(x)=e^x,\ \ y_2(x)=\sin x$, הם שני פתרונות של המשוואה $y''+p(x)y'+q(x)y=0$, עם מקדמים רציפים בקטע $[0,\pi]$?

2) הראו כי הפונקציות $y_1(x)=\sin x^2,\ \ y_2(x)=\cos x^2$ הן פתרונות בת"ל של המשוואה $xy''-y'+4x^3y=0$, בקטע $(-4,\infty)$.

חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות והראו כי הוא מתאפס רק עבור $x=0$.
דני טוען שיש בכך סתירה לטענה ידועה. מהי הטענה? והאם דני צודק?

3) בדיקה ישירה מראה שהפונקציות $y_1(x)=xe^x,\ \ y_2(x)=e^{-x}$,
הן פתרונות של המשוואה $y''-\frac{2}{1+2x}y'-\frac{2x+3}{1+2x}y=0$, בקטע $\left(-\frac{1}{2},\infty\right)$.
האם הפונקציות הללו בת"ל בקטע?

4) נתונות שתי פונקציות $y_1=x^3$, $y_2=|x^3|$, בקטע $[-4,4]$.

א. חשבו את הוורונסקיאן של הפונקציות בקטע.

ב. בדקו האם הפונקציות תלויות לינארית בקטע.

ג. האם ייתכן כי הפונקציות הן פתרונות של אותה מד"ר הומוגנית מסדר שני בעלת מקדמים רציפים?

ד. הפונקציות הנתונות הן פתרונות של המד"ר $xy''-2y'=0$.
האם יש בכך סתירה לתוצאה בסעיף ג'?

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. יהיו $y_1(x)$, $y_2(x)$ פונקציות גזירות פעמיים בקטע I ,
ונניח כי הוורונסקיאן שלהן שונה מאפס ב- I .
הוכיחו כי קיימת משוואה הומוגנית מסדר 2, בעלת מקדמים רציפים בקטע, ש- $y_1(x)$, $y_2(x)$ הם פתרונות שלה.

ב. רשמו משוואה הומוגנית מסדר שני עם מקדמים רציפים בקטע $x>0$,
שהפונקציות $y_1(x)=x^2$, $y_2(x)=x^4$, הן פתרונות שלה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) נתון כי $y_1(x),\ y_2(x)$, הם פתרונות של המד"ר $y''(x)+p(x)y'+q(x)=0$,
בקטע I , כאשר p, q רציפות בקטע I .
הראו כי אם קיימת נקודה c בקטע I , שעבורה $y_1(c)=y_2(c)=0$,
אז $\{y_1(x), y_2(x)\}$ אינה מערכת בסיסית של פתרונות המד"ר הנתונה.

תשובות סופיות

1) לא.

2) $W=-2x$

3) כן.

4) א. $W=0$ ב. שאלת בדיקה. ג. לא. ד. לא.

5) א. שאלת הוכחה . ב. $y''-\frac{5}{x}y'+\frac{8}{x^2}y=0$

6) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משפט הקיום והיחידות למדר לינארית מסדר שני

שאלות

1) נתונה המשוואה $y''-4y=12x$.

א. פתרו את המשוואה.

ב. מצאו פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=1 \\ y'(0)=11 \end{cases}$.

ג. נסו למצוא פתרון המקיים: $\begin{cases} y(0)=4 \\ y'(0)=2 \\ y''(0)=1 \end{cases}$.

האם כישלונך מפריך את משפט הקיום?

ד. תנו דוגמה מפורשת לשני פתרונות שונים, המקיימים $y(0)=1$.

האם הדוגמה מפריכה את משפט היחידות?

2) נתונה הבעיה: $\begin{cases} x^2y''-2xy'+2y=0 \\ y(0)=0 \\ y'(0)=0 \end{cases}$.

הראו כי $y_1(x)=0$ ו- $y_2(x)=x^2$, הם פתרונות של הבעיה.

האם אין בכך סתירה למשפט הקיום והיחידות?

3) האם קיימת משוואה דיפרנציאלית ליניארית מסדר שני, עם מקדמים רציפים בסביבת הנקודה $x=0$, כך שהפונקציות $y=4x$ ו- $y=\sin 4x$ הן פתרונותיה?

תשובות סופיות

1) א. $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}-3x$ ב. $y=4e^{2x}-3e^{-2x}-3x$

ג. המשוואות הראשונה והשלישית סותרות זו את זו. לא.

ד. לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

2) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

3) לפתרון המלא עם הסברים מפורטים היכנסו לאתר.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

השיטה האופרטורית

הערה: נושא זה לא נלמד בדרך כלל; בדקו עם המרצה אם הוא נדרש או לא.

בשאלות אלו הסימון הוא: $ay''+by'+cy=Q(x) \quad \Leftrightarrow \quad \left(aD^2+bD+c\right)y=Q(x)$.

שאלות

פתור את המשוואות הבאות:

1) $\left(D^2-D-2\right)y=4e^{-2x}+10e^{x}+11$

2) $\left(D^2-2D+1\right)y=10e^{4x}+e^{x}-1$

3) $\left(D^2+D-2\right)y=4e^{x}+e^{10x}+14$

4) $\left(D^2+4\right)y=\sin 5x$

5) $\left(D^2-4\right)y=\sin x\cos x\cos 2x$

6) $\left(D^2+D-2\right)y=\cos x-3\sin x$

7) $\left(D^2+2D-3\right)y=2\cos x\cos 2x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + e^{-2x} - 5e^x - 5.5$

2) $y = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{10}{9}e^{4x} + x^2e^x - 1$

3) $y = c_1e^x + c_2e^{2x} - 4xe^x + \frac{1}{72}e^{10x} + 7$

4) $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{21}\sin 5x$

5) $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} - \frac{1}{80}\sin 4x$

6) $y = c_1e^x + c_2e^{-2x} + \sin x$

7) $y = c_1e^x + c_2e^{-3x} + \frac{1}{10}\sin x - \frac{1}{5}\cos x + \frac{1}{30}\sin 3x - \frac{1}{15}\cos 3x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 12 - שימושים של משוואות דיפרנציאליות

תוכן העניינים

1. בעיות גדילה ודעיכה 94
2. בעיות בגיאומטריה אנליטית 96
3. עקומות אורתוגונליות 98
4. בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום 99
5. בעיות שונות 100

בעיות גדילה ודעיכה

שאלות

1) קצב הריבוי הטבעי העולמי הוא 2% בשנה.
ידוע כי בשנת 1980 היו בעולם 4 מיליארד איש.

א. כמה אנשים היו בעולם בשנת 2010?

ב. כמה אנשים היו בעולם בשנת 1974?

ג. באיזו שנה יהיו בעולם 50 מיליארד אנשים?

*הניחו שאוכלוסיית העולם גדלה מעריכית (כלומר, שבכל רגע קצב הגידול פרופורציונלי לערכו).

2) האוכלוסייה בעיר מסוימת גדלה מעריכית.
בשנה מסוימת היו בעיר 400 אלף תושבים,
ואחרי 4 שנים היו בה 440 אלף תושבים.

א. מצאו את אחוז הגידול השנתי.

ב. מצאו כעבור כמה שנים (החל מהשנה המסוימת),
היו בעיר 550 אלף תושבים.

3) אדם הפקיד סכום כסף בבנק בריבית דריבית של 4%.
כעבור 5 שנים הצטברו לאדם 5,000 ש״ח.

א. כמה כסף הפקיד האדם?

ב. כעבור כמה שנים יהיו לאדם 7,000 ש״ח?

4) מספר חיות הבר בעין גדי גדל בצורה מעריכית.
בספירה הראשונית היו 1,000 חיות.
בספירה השנייה שנעשתה, כעבור 20 חודשים, היו 1,400 חיות בר.
מצאו אחרי כמה חודשים, החל מהספירה הראשונה,
היו בשמורה 2,000 חיות בר.

5) ליסוד הרדיואקטיבי פחמן 14 יש זמן מחצית חיים של 5,750 שנים.
ידוע כי קצב ההתפרקות הרגעי של היסוד,
פרופורציונלי לכמותו הנמצאת באותו הרגע.

א. כמה גרמים של יסוד זה ישרדו אחרי 1,000 שנים,
מכמות התחלתית של 100 גרם?

ב. כעבור כמה שנים תישאר כמות של 10 גרם,
מכמות התחלתית של 100 גרם?

כתב ופתר – גיא סלומון ©

6) בבריכה אחת יש 240 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-4% כל שבוע.
בבריכה השנייה יש 200 טון דגים, וכמות הדגים בה גדלה ב-10% כל שבוע.

א. בעוד כמה שבועות תהיינה כמויות הדגים בשתי הבריכות שוות?

ב. בעוד כמה שבועות תהיה כמות הדגים שבבריכה השנייה גדולה פי 2 מכמות הדגים שבבריכה הראשונה?

תשובות סופיות

1) א. 7.28 מיליארד. ב. 3.54 מיליארד. ג. בשנת 2,106.

2) א. 2%. ב. 15.92 שנים.

3) א. 4093.65 ₪. ב. 13.41 שנים.

4) 40.77 חודשים.

5) א. 88.69 גרם. ב. 19,188 שנים.

6) א. 3.04 שבועות. ב. 14.6 שבועות.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות גיאומטריות

שאלות

1) על עקום מסוים ידוע, שהשיפוע של המשיק בכל נקודה (x,y) על העקום,
שווה ל- $-\frac{x}{y}$.
מצאו את משוואת העקום.

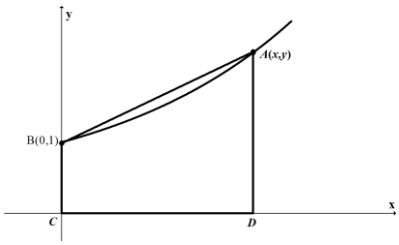
2) מצאו את משוואת העקום, שהנורמל שלו בכל נקודה עובר בראשית.

3) מצאו את משוואת העקום, ששיפוע המשיק לו בכל נקודה שווה למחצית שיפוע הקטע מהראשית לנקודה.

4) תרגמו את התיאור המילולי הבא למשוואה דיפרנציאלית ופתרו אותה:
נתון עקום ברביע הראשון, העובר בנקודה $(2,4)$.
נתון כי ההפרש בין שיפוע המשיק לגרף העקום בנקודה $A(x,y)$ שעליו,
ובין שיפוע הישר המחבר את A עם ראשית הצירים,
שווה לשיעור ה- y של הנקודה A.

5) מצאו את משוואת העקום, המאונך לישר העובר דרך נקודה כלשהי על העקום ודרך הנקודה $(3,4)$, אם ידוע שהעקום עובר גם דרך הראשית.

6) קטע הנורמל לעקום בנקודה (x,y) שבין נקודה זו וציר ה- x,
נחצה על ידי ציר ה- y.
מצאו את משוואת עקום זה.



7) נתון עקום העובר בנקודה $B(0,1)$.
בכל נקודה A שעל העקום, שווה שיפוע העקום לשטחו של הטרפז ABCD, הנראה בציור.
מהי משוואת העקום?

8) נתון עקום, ברביע הראשון, העובר בנקודה $(1,3)$,
ושיפוע המשיק אליו בנקודה (x,y) שווה ל- $-\left(1+\frac{y}{x}\right)$.
מצאו את משוואת העקום.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

9) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(1,2)$,
ושבכל נקודה (x,y) שעליו שיפוע הנורמל הוא $\frac{2xy}{y^2-x^2}$.

10) מצאו את משוואת העקום, העובר דרך הנקודה $(0,1)$, כך שהמשולש המוגבל
על ידי ציר ה- y, המשיק לעקום בנקודה כלשהי שעליו $M(x,y)$ והקטע OM,
מהראשית O ל-M, הוא משולש שווה שוקיים, שבסיסו הקטע MN
(כאשר N היא הנקודה בה המשיק הנ"ל חותך את ציר ה- y).
ציירו ציור מתאים ברביע הראשון הממחיש את הבעיה.

תשובות סופיות

1) $x^2+y^2=k$
2) $x^2+y^2=k$
3) $y^2=ax$
4) $y=2xe^{x-2}$
5) $y=4\pm\sqrt{25-(x-3)^2}$
6) $2x^2+y^2=k$
7) $y=2e^{x^2/4}-1$
8) $2xy+x^2=7$
9) $x^3-3y^2x=11$
10) $2=y+\sqrt{y^2+x^2}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

עקומות אורתוגונליות

שאלות

מצאו את משפחת העקומות האורתוגונליות למשפחות העקומות בשאלות **1-4**:

1) $2\ln x+\ln y=c$

2) $xy=c$

3) א. $x^2+2y^2=c$

ב. מצאו את העקומה האורתוגונלית לעקומה $x^2+2y^2=9$, בנקודה $(1,2)$ שעליה.

4) $x^2+y^2=cx$

5) מצאו את משפחת העקומות, היוצרות זווית של $45°$ עם משפחת המעגלים $x^2+y^2=c$.

תשובות סופיות

1) $2\ln x+\ln y=c$

2) $y^2-x^2=k$

3) $y=ax^2 \quad , \quad y=2x^2$

4) $y=m(x-c)^2 \quad y>0$

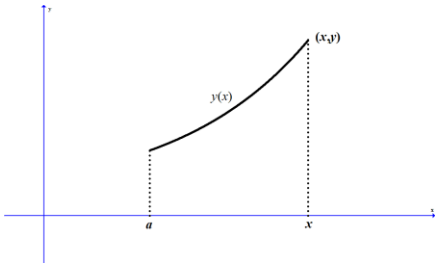
5) $\ln|x|+\frac{1}{2}\ln\left(\left(\frac{y}{x}\right)^2+1\right)=-\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

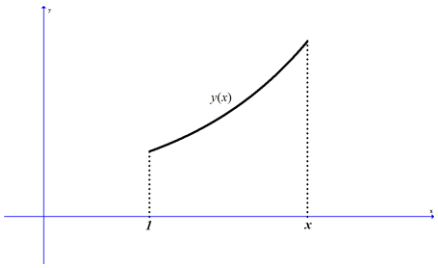
בעיות הקשורות לשטח מתחת לעקום

שאלות

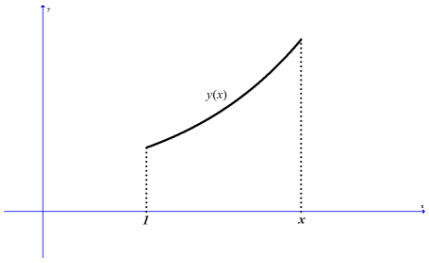
1) שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה- x, $x=a$, ו- x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי השטח S פרופורציונלי לאורך הקשת
בין הנקודות $(a,y(a))$ ו- $(x,y(x))$.
מצאו את משוואת העקום.



2) שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה- x, $x=1$, ו- x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי $y(1)=2$.
האם קיים עקום כזה,
כך ששטחו של S שווה ל- $2y(x)$?



3) שטח S מוגבל על ידי עקום $y=y(x)$,
ציר ה- x, $x=1$, ו- x משתנה (ראו ציור).
ידוע כי $y(1)=2$.
האם קיים עקום כזה,
כך שהשטח של S שווה ל- $y(x)-2$?



תשובות סופיות

1) $y=k\cosh\left(\pm\frac{1}{k}x+C\right)$

2) לא.

3) כן.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

בעיות שונות

שאלות

1) בזמן $t=0$, יש במיכל 4 ק״ג מלח מומסים ב-200 ליטר מים.
נניח שמי מלח, בריכוז של 0.2 ק״ג מלח לליטר מים, מוזרמים לתוך המיכל בקצב של 25 ליטר לדקה, ושהתמיסה המעורבת מנוקזת החוצה מן המיכל באותו קצב.

א. חשבו את כמות המלח במיכל לאחר 8 דקות.

ב. תוך כמה זמן תהיה כמות המלח במיכל כפולה מהכמות ההתחלתית?

2) סירה נגררת בקצב של 12 קמ״ש.
ברגע $t=0$, כשכבל הגרירה מנותק, מתחיל אדם, הנמצא בסירה, לחתור בכיוון התנועה ומפעיל כוח של 20 ניוטון על הסירה.
משקל החותר והסירה הוא 500 ק״ג, וההתנגדות (ניוטון) שווה ל- $2v$,
כאשר v נמדדת במטר/שניה.

א. מצאו את מהירות הסירה כעבור חצי דקה.

ב. מצאו כעבור כמה זמן תהיה מהירות הסירה 5 מטר/שנייה.

ג. מצאו את המהירות הסופית.

3) חוק הקירור של ניוטון קובע, כי הקצב בו גוף מתקרר פרופורציונלי להפרש בין טמפרטורת הגוף וטמפרטורת הסביבה.
חומר בעל טמפרטורה של 150 מעלות נמצא בכלי בעל טמפרטורת אוויר קבועה, השווה ל-30 מעלות. החומר מתקרר לפי חוק הקירור של ניוטון, ולאחר כחצי שעה יורדת טמפרטורת החומר ל-70 מעלות.

א. מהי טמפרטורת החומר לאחר כשעה?

ב. כעבור כמה זמן תהיה טמפרטורת החומר 40 מעלות?

4) נתון מיכל בצורת גליל, שרדיוס בסיסו 1 ס״מ וגובהו 4 ס״מ. הגליל מלא במים.
ברגע מסוים פותחים ברז בתחתית הגליל, והמים זורמים החוצה בקצב שפרופורציונלי לשורש מגובהם.
נסמן ב- $h(t)$ את גובה פני המים, וב- k את קבוע הפרופורציה.

א. רשמו מד״ר עבור גובה פני המים, $h(t)$.
מהו תנאי ההתחלה של הבעיה?

ב. ידוע כי $k=-2\pi$.
פתרו את המד״ר.
תוך כמה זמן תישאר בגליל מחצית מכמות המים ההתחלתית?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) כדור שלג, שרדיוסו ההתחלתי 4 ס״מ, נמס, כך שהקצב שבו רדיוסו קטן – פרופורציונלי לשטח פניו.
לאחר כחצי שעה רדיוס הכדור שווה ל-3 ס״מ.

א. רשמו נוסחה שתתאר את רדיוס הכדור בזמן t.

ב. כעבור כמה זמן יהיה נפח כדור השלג $\frac{1}{64}$ מנפחו ההתחלתי?

6) מבלון מלא אוויר, שרדיוסו R, מתחיל לצאת אוויר.
קצב יציאת האוויר הוא $3V(t)$, כאשר $V(t)$ הוא נפח הבלון בזמן t.
הוכיחו כי כעבור $\ln 2$ שניות נפח הבלון יקטן לכדי שמינית מנפחו ההתחלתי.

הערה: בשאלות **5** ו-**6** נדרש ידע בהפרדת משתנים.

תשובות סופיות

1) א. 26.75 ק״ג. ב. 0.942 דקות.

2) א. 4.09 מטר/שניה. ב. 72 שניות. ג. 10 מטר/שניה.

3) א. $43\frac{1}{3}^\circ$ ב. 1.13 שעות.

4) א. $h(0)=4\ ;\ \pi h'(t)=k\sqrt{h(t)}$ ב. $h=(2-t)^2\ ;\ t=\sqrt{2}+2$

5) א. $R(t)=\frac{12}{2t+3}$ ב. 4.5 שעות.

6) שאלת הוכחה.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 13 - וקטורים גיאומטרים

תוכן העניינים

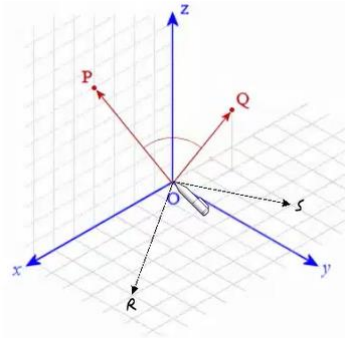
1. וקטורים 102
2. מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת 109
3. שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב 111

וקטורים

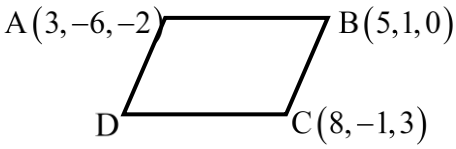
הערת סימון: נסמן את הווקטור u כך $\underline{u}$. סימונים מקובלים נוספים הם: $\vec{u}, \mathbf{u}$.
את גודל הווקטור $\underline{u}$ נסמן כך $|\underline{u}|$. סימון מקובל נוסף הוא $\|\underline{u}\|$.
גודל וקטור נקרא גם אורך הווקטור וגם הנורמה של הווקטור.

שאלות

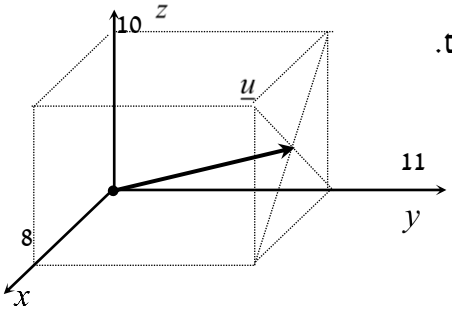
1) רשמו את נוסחת כל אחד מהווקטורים $\vec{P},\vec{Q},\vec{R},\vec{S}$ שבאיור.
הניחו שאורך ורוחב כל משבצת באיור הוא יחידה אחת.



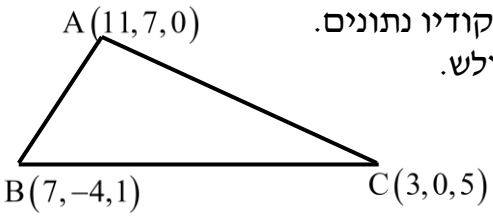
2) בשרטוט הבא נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
רמז: היעזר בנוסחת אמצע קטע.



3) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ על פי השרטוט.



4) בשרטוט הבא נתון משולש ששיעורי קדקודיו נתונים.
מצאו את שיעורי מפגש התיכונים במשולש.



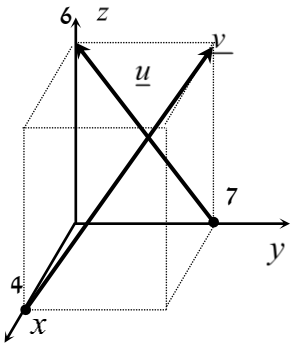
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) ענו על הסעיפים הבאים (אין קשר בין הסעיפים):

א. מצאו את הווקטור $\overrightarrow{EF}$, אם נתונות הנקודות $E(2,0,-3)$ ו- $F(7,-1,-3)$.

ב. מצאו את שיעורי הנקודה N, אם נתונה הנקודה $M(0,-4,1)$ והווקטור $\overrightarrow{MN}=(-1,-1,9)$.

6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלפניך.
מצאו מהו הווקטור $\underline{u}$ ומהו הווקטור $\underline{v}$.



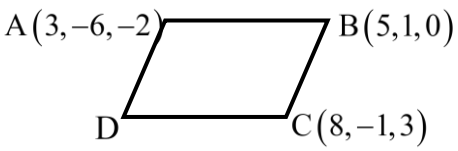
7) מצאו את x, y ו- z, אם נתון ש- $\underline{u}=\underline{v}$, כאשר $\underline{u}=(4,-1,2)$, $\underline{v}=(z-2,y+1,x-3)$.

8) נתונות הנקודות הבאות:
$E(9,11,4)$, $D(7,4,10)$, $C(6,9,0)$, $B(3,7,-4)$, $A(1,0,2)$.

א. הראו כי: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DE}$.

ב. האם ניתן לומר כי גם $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$? נמק.

9) בשרטוט נתונה מקבילית,
ששיעורי שלושה מקדקודיה נתונים.
מצאו את שיעורי הקדקוד D.
* אין להיעזר בפתרון בנוסחת אמצע קטע.



כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **10-16** נתונים הווקטורים: $\underline{u}=(-3,1,4)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$, $\underline{w}=(2,6,-5)$.

* בשאלות **13**, **14**, **16** הסבירו את משמעות התוצאות מבחינה גיאומטרית.

10) חשבו:

א. $2\underline{u}$ ב. $-0.5\underline{v}$ ג. $3\underline{u}-2\underline{v}$

11) חשבו:

א. $0.25\underline{v}-0.5\underline{u}$ ב. $\underline{v}-0.5\underline{u}+2\underline{w}$

12) $2\underline{v}-\underline{u}+4\underline{w}$

13) $\underline{u}/|\underline{u}|$

14) $d(\underline{u},\underline{v})$

15) $\underline{v}\cdot\underline{u}+2\underline{w}\cdot\underline{v}$

16) $\text{proj}(\underline{u},\underline{v})$

בשאלות **17-19** נתונות הנקודות: $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$,
ויש למצוא את הווקטורים:

17) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

18) $2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

19) $2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$

20) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(-4,2,1)$, $B(0,2,-1)$, $C(-3,-5,0)$, $D(-7,-5,2)$.
הוכיחו כי המרובע הוא מקבילית.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

21) נתונים ארבעת קדקודי המרובע ABCD:
$A(1,2,0)$, $B(-2,5,3)$, $C(-1,8,4)$, $D(4,3,-1)$.

א. הוכיחו כי המרובע הוא טרפז.

ב. האם הטרפז שווה שוקיים?

22) חשבו את הזווית שבין הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$, כאשר:

א. $\underline{u}=(-2,2,5)$, $\underline{v}=(4,0,1)$

ב. $\underline{u}=(6,-3,1)$, $\underline{v}=(2,5,3)$

ג. $\underline{u}=(-2,1,3)$, $\underline{v}=(4,-2,-6)$

23) מצאו את שטחו של משולש ABC, שקדקודיו הם:
$A(-3,2,1)$, $B(0,3,2)$, $C(5,-1,0)$.

24) נתונים הווקטורים: $\underline{v}=(5,0,3)$, $\underline{u}=(2,-1,0)$.
מצאו וקטור $\underline{w}$, שמכפלתו ב-$\underline{u}$ היא 0 ומכפלתו ב-$\underline{v}$ היא 0,
אם ידוע שגודלו הוא $\sqrt{70}$.

25) מצאו וקטור שמאונך לשני הווקטורים $(3,2,1)$ ו-$(1,-1,2)$,
ושמרחקו מהווקטור $(1,1,0)$ הוא $\sqrt{3}$.

26) ענו על שני הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $u \perp v \Leftrightarrow |u+v|=|u-v|$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

ב. הוכיחו כי $u \perp v \Leftrightarrow |u+v|^2=|u|^2+|v|^2$.
הסבירו מהו הפירוש הגיאומטרי של תכונה זו במישור.

27) ענו על חמשת הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $|u+v|^2=|u|^2+2u\cdot v+|v|^2$.

ב. הוכיחו כי $|u-v|^2=|u|^2-2u\cdot v+|v|^2$.

ג. הוכיחו כי $(u-v)(u+v)=|u|^2-|v|^2$.

ד. הוכיחו כי $|u+v|^2+|u-v|^2=2|u|^2+2|v|^2$.
תנו פירוש גיאומטרי לתוצאה במישור.

ה. הוכיחו כי $\frac{1}{4}\left(|u+v|^2-|u-v|^2\right)=u\cdot v$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי אותה נורמה.
נגדיר $a=u-2v,\ b=3u+v$.
אם α היא הזווית בין a ל- b, אז $\cos\alpha$ שווה ל-?

29) יהיו $w_1,w_2\in\mathbb{R}^n$ וקטורים שונים מ- 0, אורתוגונליים זה לזה ובעלי נורמה k.
יהי $v=\alpha w_1+\frac{3}{4}w_2$ וקטור שמרחקו מ- $2w_2$ שווה למרחקו מ- w_1.
מהו המרחק של v מ- w_1?

30) יהיו $u,v\in\mathbb{R}^n$ וקטורי יחידה המקיימים $\|u-v\|=2$.
הוכיחו ש- u ו- v הם בהכרח כפולה בסקלר אחד של השני.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $\vec{P}=(4,0,7),\quad \vec{Q}=(-2,1,3),\quad \vec{R}=(6,4,0),\quad \vec{S}=(-2,4,0)$

2) $D=(6,-8,1)$

3) $\underline{u}=(4,11,5)$

4) $M=(7,1,2)$

5) א. $\overrightarrow{EF}=(5,-1,0)$ ב. $N=(-1,-5,10)$

6) $\underline{u}=(0,-7,6),\quad \underline{v}=(-4,7,6)$

7) א. $x=5,\quad y=-2,\quad z=6$

8) א. הוכחה. ב. לא.

9) $D=(6,-8,1)$

10) א. $(-6,2,8)$ ב. $(-2,1,3)$ ג. $(-17,7,24)$

11) א. $(2.5,-1,-3.5)$ ב. $(9.5,9.5,-18)$

12) $(19,19,-36)$

13) $\left(\frac{-3}{\sqrt{20}},\frac{1}{\sqrt{20}},\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$

14) $\sqrt{158}$

15) 14

16) $\underline{u}^*$

17) $(5,7,1)$

18) $(-8,-16,8)$

19) $(8,12,0)$

20) שאלת הוכחה.

21) א. שאלת הוכחה. ב. כן.

22) א. $\alpha=97.277^\circ$ ב. $\alpha=90^\circ$ ג. $\alpha=180^\circ$

23) $S_{\Delta ABC}=10.173$ יח"ש.

24) $(-3,-6,5)$

25) $v=\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\ or\ v=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) $\frac{1}{\sqrt{50}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

29) $\frac{5}{4}k$

30) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מכפלה וקטורית ומכפלה מעורבת

שאלות

1) נתון: $u=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

חשבו: $(u\times v)\times w$.

2) חשבו את שטח המשולש, שקדקודיו: $A(8,2,3),\ B(4,-1,2),\ C(-8,0,4)$.

3) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.

ידוע כי: $|u|\neq 0$, $u\cdot w=0$, $u\times v=0$.

הוכיחו כי: $v\cdot w=0$.

4) נתונים שני וקטורים u,v במרחב.

ידוע כי: $|v|=4$, $|u|=1$, $u\perp v$.

חשבו: $|(u+v)\times(u-v)|$.

5) נתון $u=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ v=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\ w=\begin{pmatrix}7\\8\\10\end{pmatrix}$.

חשבו:

א. $u\cdot(v\times w)$ ב. $v\cdot(w\times u)$ ג. $(u\times v)\cdot w$

6) ענו על הסעיפים הבאים:

א. חשבו את נפח המקבילון שקדקודיו $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

ב. חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(1,1,1),B(2,2,2),C(3,0,2),D(4,1,1)$.

7) חשבו את נפח הפירמידה שקדקודיה $A(2,2,5),B(1,-1,-4),C(3,3,10),D(8,6,3)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

8) נתון מקבילון הבנוי על וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$.
הוכיחו כי נפח המקבילון, הבנוי על הווקטורים $\mathbf{a},\mathbf{a}-\mathbf{b},\mathbf{a}+\mathbf{b}-4\mathbf{c}$,
שווה לפי 4 מנפח המקבילון הנתון.

9) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
הוכיחו כי $[(u+v)\times(v+w)](u+w)=2w\cdot(u\times v)$.

10) נתונים שלושה וקטורים u,v,w במרחב.
ידוע כי: $u\cdot(v\times w)=4$.
חשבו:

א. $u\cdot(w\times v)$

ב. $(v\times w)\cdot u$

ג. $w\cdot(u\times v)$

ד. $v\cdot(u\times w)$

11) נתונים שלושה וקטורים $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ במרחב.
מהי הנוסחה עבור $\mathbf{a}\times\mathbf{b}\times\mathbf{c}$?

תשובות סופיות

1) $\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$

2) $S=22.5$

3) שאלת הוכחה.

4) 8

5) א. -3 ב. -3 ג. -3

6) א. -6 ב. 1

7) $9\frac{1}{3}$

8) שאלת הוכחה.

9) שאלת הוכחה.

10) א. -4 ב. 4 ג. 4 ד. 4

11) אין לו נוסחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי מכפלה וקטורית לגיאומטריה אנליטית במרחב

שאלות

1) הוכיחו שהנקודות הבאות נמצאות על מישור אחד:
$A=(1,2,1)$, $B(1,1,1)$, $C=(2,1,2)$, $D(2,2,2)$.

2) מצאו את מרחק הנקודה $A(3,-2,1)$
מהישר $L:(-10,8,-8)+t(2,-1,2)$.

3) נתונים שני ישרים:

$$L_1:\quad \frac{x-2}{2}=3-y=\frac{z-4}{3},\quad L_2:\quad x+7=y-5,\ z=3$$

א. הוכיחו שהישרים מצטלבים.
ב. מצאו את המרחק בין הישרים.

תשובות סופיות

1) שאלת הוכחה.
2) $\sqrt{26}$
3) א. שאלת הוכחה. ב. 5.7735

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 14 - וקטורים אלגברים - גיאומטריה אנליטית במרחב

תוכן העניינים

1. הצגה פרמטרית של ישר 112
2. מצב הדדי בין ישרים 115
3. הצגה פרמטרית של מישור 117
4. משוואת מישור 118
5. מעברים בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור 119
6. מישורים המקבילים לצירים 120
7. מצב הדדי בין ישר ומישור 121
8. מצב הדדי בין מישורים 122
9. ישר חיתוך בין מישורים 123
10. חישובי זוויות שונות ..... (ללא ספר)
11. זווית בין שני ישרים 124
12. זווית בין ישר ומישור 125
13. זווית בין שני מישורים 126
14. חישובי מרחקים ..... (ללא ספר)
15. מרחק בין שתי נקודות במרחב 127
16. מרחק בין נקודה לישר 128
17. מרחק בין נקודה למישור 129
18. מרחק בין ישרים מקבילים 130
19. מרחק בין ישר למישור 131
20. מרחק בין מישורים מקבילים 132
21. מרחק בין ישרים מצטלבים 133
22. סיכום מרחקים ..... (ללא ספר)
23. שאלות מסכמות 134

בסוף חוברת העבודה תוכלו למצוא סיכום מלא ומפורט של הנוסחאות.

הצגה פרמטרית של ישר

שאלות

1) האם הנקודה $A(7,0,3)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=(4,3,0)+t(1,-1,1)$?

2) האם הנקודה $B(4,-2,-10)$ נמצאת על הישר $\ell: \underline{x}=t(2,-1,5)$?

3) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במישור שעובר בנקודות $A(-5,-2)$ ו- $B(1,6)$.

4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודות $C(3,0,-2)$ ו- $D(4,1,1)$.

5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $G(2,-7,1)$
ומקביל לישר $\ell: \underline{x}=(0,3,-1)+t(-4,2,1)$.

6) מצאו במרחב הצגה פרמטרית של ישר העובר דרך הנקודה $(1,2,3)$
ומאונך לישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,0)+s(1,-2,4)$.

7) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה הצגה פרמטרית של ישר: $\ell: \underline{x}=(1,2,3)+t(4,5,6)$.
כתבו את ההצגה בעזרת הקואורדינאטות x, y ו- z.

ב. נתונה הצגה של ישר בעזרת קואורדינאטות: $x=1+2t$, $y=10$, $z=4-t$.
כתבו את ההצגה הפרמטרית שלו.

8) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ציר ה- y במרחב.

9) מצאו את הצגתו הפרמטרית של ישר במרחב שעובר בנקודה $M(3,-1,4)$
ומקביל לציר ה- z.

10) מצאו את נקודת החיתוך של הישר $\ell: \underline{x}=(1,-2,6)+t(-2,1,2)$ עם המישור $[xy]$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

11) ישר עובר בנקודה $(1,-1,4)$ וכיוונו $(4,10,2)$.
מי מבין הבאים מתאר את משוואת הישר:

א. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(4,10,2)$

ב. $\underline{x}=(3,4,5)+t(4,10,2)$

ג. $\underline{x}=(1,-1,4)+t(2,5,1)$

ד. $\underline{x}=(5,9,6)+t(8,20,4)$

ה. כל התשובות נכונות.

12) ישר עובר דרך הנקודות $A(1,-1,2)$ ו- $B(4,0,1)$.
תארו את הישר בארבע דרכים שונות:

א. משוואה וקטורית אחת.

ב. הצגה פרמטרית של 3 משוואות (נק' כללית).

ג. הצגה אלגברית.

ד. כקו חיתוך של שני מישורים.

13) הציגו כל אחד מהישרים הבאים בעזרת משוואה וקטורית אחת:

א. $\ell:\begin{cases}x=1-4t\\y=2t\\z=2+10t\end{cases}$

ב. $\ell:\begin{cases}x=1+t\\y=4\\z=10t\end{cases}$

ג. $\ell:\ \dfrac{x-1}{2}=y+1=z-4$

ד. $\ell:\ x-1=y+10,\ z=4$

ה. $\ell:\ \begin{cases}x-y+z=1\\2x-y+3z=3\end{cases}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) כן.

2) לא.

3) $\ell : \underline{x} = (-5,-2) + t(6,8)$

4) $\ell : \underline{x} = (4,1,1) + t(1,1,3)$

5) $\ell : \underline{x} = (2,-7,1) + s(-4,2,1)$

6) $\ell : \underline{x} = (1,2,3) + t(2,1,0)$

7) א. $x = 1+4t \ , y = 2+5t \ , z = 3+6t$ ב. $\ell : \underline{x} = (1,10,4) + t(2,0,-1)$

8) $\ell : \underline{x} = t(0,1,0)$

9) $\ell : \underline{x} = (3,-1,4) + t(0,0,1)$

10) $(7,-5,0)$

11) ה

12) א. $\ell : \underline{x} = (1,-1,2) + t \cdot (3,1,-1)$ ב. $\ell : \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -1+t \\ z = 2-t \end{cases}$

ג. $\ell : \dfrac{x-1}{3} = y+1 = 2-z$ ד. $\ell : \begin{cases} x-3y = 4 \\ y+z = 1 \end{cases}$

13) א. $\underline{x} = (1,0,2) + t(-4,2,10)$ ב. $\underline{x} = (1,4,0) + t(1,0,10)$

ג. $\underline{x} = (1,-1,4) + t(2,1,1)$ ד. $(x,y,z) = (1,-10,4) + t(1,1,0)$

ה. $(x,y,z) = (2,1,0) + t(-2,-1,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין ישרים

שאלות

1) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_1 : \underline{x} = (2,-3,0) + t(5,-1,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (12,-5,4) + s(-10,2,-4)$

2) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_3 : \underline{x} = (0,1,-7) + t(-2,1,1)$, $\ell_4 : \underline{x} = (2,0,-6) + s(6,-3,-3)$

3) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_5 : \underline{x} = (-3,5,1) + t(4,0,-1)$, $\ell_6 : \underline{x} = (-1,7,4) + s(-1,1,2)$

4) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_7 : \underline{x} = (3,0,0) + t(2,-2,5)$, $\ell_8 : \underline{x} = (0,1,-5) + s(3,1,-2)$

5) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_9 : \underline{x} = (-4,1,-1) + t(3,0,-1)$, $\ell_{10} : \underline{x} = s(6,0,-2)$

6) מצאו את המצב ההדדי בין הישרים הבאים.
אם הם נחתכים, מצאו גם את נקודת החיתוך ביניהם.
$\ell_{11} : \underline{x} = (2,8,-1) + t(1,0,0)$, $\ell_{12} : \underline{x} = (-5,8,2) + s(2,0,-1)$

7) מצאו את ערכו של הפרמטר k, שבעבורו הישרים:
$\ell_1 : \underline{x} = (k+1,1-k,6) + t(1,-2,2)$, $\ell_2 : \underline{x} = (k-1,7,-k) + s(1-k^2,k^2+2,-6)$

א. מקבילים.
ב. מתלכדים.

8) נתונות הנקודות $\mathrm{D}(-2,3,k)$, $\mathrm{C}(-6,3,-1)$, $\mathrm{B}(k,-1,3)$, $\mathrm{A}(3,-1,5)$.
הראו כי לכל ערך של k, הישרים ℓ_{AB} ו- ℓ_{CD} מצטלבים.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) מתלכדים.

2) מקבילים.

3) נחתכים, $(1,5,0)$.

4) מצטלבים.

5) מקבילים.

6) נחתכים, $(1,8,-1)$.

7) א. $k=2$. ב. $k=-2$.

8) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

הצגה פרמטרית של מישור

שאלות

1) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודות הבאות:
$A(1,-4,0)$, $B(3,6,2)$, $C(0,-3,1)$.

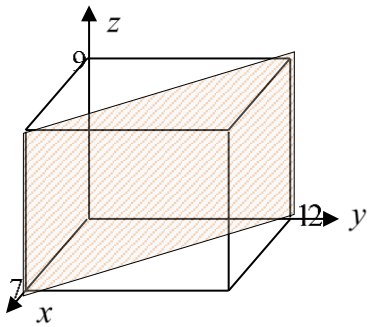
2) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $Q(6,7,-1)$,
ומכיל את הישר $\ell : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)$.

3) נתונים שני ישרים: $\ell_1 : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)$, $\ell_2 : \underline{x}=(2,16,11)+s(0,1,-6)$.
הראו שהישרים נחתכים ומצאו הצגה פרמטרית של המישור המכיל אותם.

4) מצאו את הצגתו הפרמטרית של מישור שעובר בנקודה $D(5,-2,-1)$
ומכיל את ציר ה- x .

5) מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור $[xz]$.

6) נתונה תיבה שמידותיה מצוינות במערכת הצירים שלהלן.
מצאו את הצגתו הפרמטרית של המישור המקווקו.



תשובות סופיות

1) $\pi : \underline{x}=(1,-4,0)+t(2,10,2)+s(-1,1,1)$

2) $\pi : \underline{x}=(-2,-2,5)+t(1,0,-4)+s(8,9,-6)$

3) $\pi : \underline{x}=(0,1,-1)+t(1,9,-3)+s(0,1,-6)$

4) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(5,-2,-1)$

5) $\pi : \underline{x}=t(1,0,0)+s(0,0,1)$

6) $\pi : \underline{x}=(7,0,0)+t(0,0,9)+s(-7,12,0)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

משוואת מישור

שאלות

1) קבעו האם הנקודות הבאות נמצאות על המישור $\pi : 2x-y+3z-6=0$:

א. $D(5,7,1)$

ב. $E(2,-1,1)$

2) מצאו את ערכו של k שבעבורו הנקודה $A(1,k,-1)$ נמצאת על המישור $\pi : kx-2y+(1+k)z+7=0$.

3) נתונה משוואת מישור $\pi : 3x+2y-z-9=0$.
מצאו את נקודות החיתוך של המישור עם שלושת הצירים.

4) נתונה משוואת מישור $\pi : 4x+y-2z+8=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שהמישור חותך מהמישור $[yz]$.

תשובות סופיות

1) א. על המישור. ב. לא על המישור.

2) $k=3$

3) $(3,0,0)$, $\left(0,4\frac{1}{2},0\right)$, $(0,0,-9)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,-8,0)+t(0,2,1)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מעבר בין הצגה פרמטרית של מישור ומשוואת מישור

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi: 2x+3z-12=0$.
כתבו הצגה פרמטרית של המישור.

2) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=(2,-5,0)+t(1,0,2)+s(0,-1,3)$.
מצאו את משוואת המישור.

3) נתונה הצגה פרמטרית של מישור: $\pi: \underline{x}=t(-2,2,1)+s(3,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור.

4) המישור π עובר בנקודות: $C(4,-1,0)$, $B(2,0,0)$, $A(1,0,-3)$.
מצאו את משוואת המישור.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. לפניך הנקודות הבאות: $(1,1,0)$, $(0,1,-2)$, $(2,0,5)$.

1. הראו ששלוש הנקודות אינן נמצאות על ישר אחד,
ומצאו הצגה פרמטרית של המישור הנקבע על ידן.
2. מצאו את משוואת המישור העובר דרך שלוש הנקודות הנ"ל.

ב. מצאו שתי נקודות נוספות הנמצאות על המישור שמצאת בסעיף א'.

ג. האם הנקודה $(4,2,1)$ נמצאת על המישור שנמצא בסעיף א'?

תשובות סופיות

1) $\pi: \underline{x}=(0,0,4)+t(0,1,0)+s(6,0,-4)$

2) $\pi: -2x+3y+z+19=0$

3) $\pi: x-3y+8z=0$

4) $\pi: 3x+6y-z-6=0$

5) א. 1. $\pi: \underline{x}=(1,1,0)+t(-1,0,-2)+s(1,-1,5)$ 2. $-2x+3y+z-1=0$

ב. למשל: $(0,0,1)$, $(-0.5,0,0)$ ג. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מישורים המקבילים לצירים

שאלות

1) נתונה משוואת המישור $\pi:\ (k+2)x+(k^2-2k-3)y-3z+k^2-1=0$.
לאיזה ערך של k המישור מקביל לציר ה- y (ולא מכיל אותו)?

2) פאותיו של טטראדר נמצאות על המישורים $x=0\ ,\ y=0\ ,\ z=0$
ו- $x+3y+2z-6=0$.
מצאו את נפח הטטראדר.

תשובות סופיות

1) $k=3$

2) 6 יח"נ.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין ישר ומישור

1) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (5,0,1) + t(4,1,-2)$, $\pi : 2x - y - 3z + 6 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

2) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (2,-1,6) + t(-1,1,2)$, $\pi : x - 3y + 2z - 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

3) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (-6,1,0) + t(3,0,-1)$, $\pi : 2x + y + 6z + 11 = 0$.
קבעו את המצב ההדדי שביניהם.
אם הישר חותך את המישור מצאו גם את נקודת החיתוך.

4) נתונים הישר והמישור $\ell : \underline{x} = (1,a,3) + t(4,1-b,0)$, $\pi : 2x - y + z - 4 = 0$.
מצאו את ערכי a ו- b, עבורם הישר מוכל במישור.

תשובות סופיות

1) הישר חותך, $(1,-1,3)$.

2) מקבילים.

3) הישר מוכל.

4) $a = 1$, $b = -7$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מצב הדדי בין מישורים

שאלות

1) בכל סעיף נתונים שני מישורים. קבעו את המצב ההדדי ביניהם.

א. $\pi_1 : 2x-y+4z-5=0$, $\pi_2 : 4x-2y+8z-10=0$

ב. $\pi_3 : x+3y-z+1=0$, $\pi_4 : 3x+9y-3z-8=0$

ג. $\pi_5 : 5x-2y-2z+3=0$, $\pi_6 : 2x+3y+z-5=0$

2) נתונים שני מישורים

$\pi_1 : 2x+\left(k^2+k\right)y-2z+1=0$, $\pi_2 : 4x+12y-4z+k^2-2=0$

מצאו את ערכי k עבורם המישורים:

א. נחתכים ב. מקבילים ג. מתלכדים

תשובות סופיות

1) א. מתלכדים. ב. מקבילים. ג. נחתכים.

2) א. $k \neq 2,-3$ ב. $k=-3$ ג. $k=2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

ישר חיתוך בין מישורים

שאלות

1) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_1 : 4x+y-2z+2=0$, $\pi_2 : 2x-y+z+10=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

2) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_3 : 8x+2y-3z+2=0$, $\pi_4 : 2x-3y+z+4=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

3) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_5 : 3x-3y+z+2=0$, $\pi_6 : 5x-2z+20=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

4) נתונים שני מישורים נחתכים: $\pi_7 : x-2y-z+6=0$, $\pi_8 : z-2=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך שבין המישורים.

5) מצאו הצגה פרמטרית של ישר החיתוך של המישור $\pi : 6x-5y+z+18=0$
עם המישור $[xz]$.

6) נתונים שני מישורים: $\pi_1 : x-3y+2z-1=0$, $\pi_2 : 4x+y-z-6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר המקביל לשני המישורים ועובר בראשית.

תשובות סופיות

1) $\ell : \underline{x}=(-2,6,0)+t(2,16,12)$

2) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(1,2,4)$

3) $\ell : \underline{x}=(0,4,10)+t\left(4,7\frac{1}{3},10\right)$

4) $\ell : \underline{x}=(0,2,2)+t(4,2,0)$

5) $\ell : \underline{x}=(-3,0,0)+t(3,0,-18)$

6) $\ell : \underline{x}=t(1,9,13)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין שני ישרים

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין זוגות הישרים הבאים:

א. $\ell_1 : \underline{x} = (4,0,0) + t(6,8,1)$, $\ell_2 : \underline{x} = s(-4,2,-4)$

ב. $\ell_1 : \underline{x} = (10,17,-18) + t(3,0,-6)$, $\ell_2 : \underline{x} = (6,5,4) + s(0,4,0)$

2) מצאו את הזווית שבין ישר העובר דרך הנקודות $A(3,4,6)$, $B(6,0,-2)$ וישר העובר דרך הנקודות $D(-1,4,2)$, $C(6,5,1)$ וקבע מה המצב ההדדי ביניהם.

3) נתונות הנקודות $A(1,-3,0)$, $B(4,2,-1)$, $C(3,-1,2)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של ישר במרחב העובר דרך הנקודות:

1. A ו-B.
2. B ו-C.
3. A ו-C.

ב. מי מבין הנקודות $D(4,2,-1)$ ו- $E(7,7,-3)$ נמצאת על הישר AB שמצאת בסעיף הקודם?

ג. חשבו את הזווית שבין הישר AB והישר BC.

4) נתון מישור שמשוואתו: $3x-4y+6=0$. הנקודות $A(x,6,1)$, $B(-2,y,-1)$ נמצאות על המישור והנקודה C נמצאת על מישור $[yz]$ ומקיימת: $z_C = 11$.
מצאו את שיעורי הנקודה C, אם ידוע כי קוסינוס הזווית שבין הישרים AB ו-AC הוא $\sqrt{\frac{13}{76}}$.

תשובות סופיות

1) א. $78.521°$ ב. $90°$

2) $63.37°$. הישרים מצטלבים.

3) א. 1. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(3,5,-1)$ א. 2. $\ell : \underline{x} = (4,2,-1) + t(-1,-3,3)$

א. 3. $\ell : \underline{x} = (1,-3,0) + t(2,2,2)$ ב. הנקודה D. ג. $35.477°$.

4) $C(0,2,11)$ או $C(0,28.45,11)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין ישר ומישור

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין הישר והמישור הבאים:
$\ell : \underline{x} = (-2,0,5) + t(-2,1,2)$, $\pi : 3x - 2y + 2z + 9 = 0$.

2) נתונות הנקודות $D(-7,3,-1)$, $C(1,2,5)$, $B(0,2,-1)$, $A(1,-1,2)$.
מצאו את הזווית בין הישר העובר בנקודות A ו-D ובין המישור ABC.

3) נתונה פירמידה משולשת SABC, שמשוואת הבסיס ABC שלה $2x + y - 2z - 6 = 0$,
וקדקוד הפירמידה הוא $S(3,1,-2)$.
מצאו את הזווית בין המקצוע הצדדי SB לבסיס הפירמידה,
אם נתון כי שיעורי הקדקוד B מקיימים $x_B = z_B = -1$.

תשובות סופיות

1) $18.87°$

2) $44.83°$

3) $14.9°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

זווית בין שני מישורים

שאלות

1) מצאו את הזווית שבין המישורים הבאים: $\pi_1 : 4x+3y+z-12=0$
ו- $\pi_2 : 4x-7y+5z+3=0$.

2) נתונה פירמידה משולשת ABCD, שקדקודיה הם:
$A(0,2,-5)$, $B(3,-1,1)$, $C(7,-1,-5)$, $D(3,2,0)$.
מצאו את הזווית בין הפאה הצדדית ABD לבסיס הפירמידה ABC.

3) מצאו את הזווית בין מישור שמשוואתו $3x+5y-z+4=0$ למישור $[xz]$.

תשובות סופיות

1) $90°$

2) $87.539°$

3) $32.312°$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין שתי נקודות במרחב

שאלה

1) נתונות הנקודות $A(2,4,-5)$, $B(0,-2,6)$ ו- $C(k,-1,13-k)$.
מצאו ערכי k עבורם המשולש ABC יהיה שווה שוקיים, כך ש- $AB = AC$.

תשובה

1) $k=8$ או $k=12$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין נקודה לישר

שאלות

1) מצאו את המרחק שבין הנקודה $A(13,-1,-19)$ לישר $\ell : \underline{x} = t(2,0,-7)$.

2) נתונות הנקודות $C(6,-4,0)$, $B(2,-1,0)$, $A(1,6,-1)$.
חשבו את שטח המשולש ABC.

3) על הישר $\ell : \underline{x} = (5,-2,0) + t(0,1,-1)$ מונחת הצלע AB של ריבוע ABCD.
אחד מקודקודי הריבוע הוא $D(5,4,2)$.
מצאו את שיעורי הקדקוד B (שתי אפשרויות).

תשובות סופיות

1) $\sqrt{54}$

2) 12.75 יח"ש.

3) $B(5,4,-6)$ או $B(5,-4,2)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין נקודה למישור

שאלות

1) מצאו את מרחקו של המישור $4x-2y-4z+15=0$ מראשית הצירים.

2) מצאו משוואת מישור המאונך לישר $\ell:\underline{x}=(1,-8,3)+t(3,-2,1)$
ונמצא במרחק $\sqrt{14}$ מהנקודה $A(4,5,-9)$.

3) נתונים ישר ומישור $\pi:2x+4y-4z+15=0$, $\ell:\underline{x}=(7,19,-3)+t(3,14,-4)$.
מצאו את הנקודות שעל הישר שמרחקן מהמישור הוא 6.5.

תשובות סופיות

1) $2\frac{1}{2}$

2) $\pi:3x-2y+z+21=0$ או $\pi:3x-2y+z-7=0$.

3) $(4,5,1)$ או $(1,-9,5)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישרים מקבילים

שאלות

1) נתונות הנקודות $A(15,0,-4)$, $B(12,-5,2)$, $C(6,1,4)$, $D(12,11,-8)$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין הישר העובר בנקודות A ו-B ובין הישר העובר בנקודות C ו-D.

ב. מצאו את המרחק בין הישרים מסעיף א'.

2) 4 צלעות של מרובע מונחות על הישרים:

$$l_1:\underline{x}=(2,0,-1)+t(1,-2,1) \quad , \quad l_2:\underline{x}=(-8,-1,19)+s(-4,1,6)$$

$$l_3:\underline{x}=(-2,7,-11)+r(-2,4,-2) \quad , \quad l_4:\underline{x}=(-2,1,5)+q(4,-1,-6)$$

א. הוכיחו כי המרובע הוא מלבן.

ב. מצאו את שטח המלבן.

תשובות סופיות

1) א. מקבילים. ב. $\sqrt{76}$ יח"א.

2) א. שאלת הוכחה. ב. $\sqrt{824}$ יח"ש.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישר למישור

שאלות

1) נתונה משוואת המישור $4x-z+6=0$.

א. מצאו את המצב ההדדי בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

ב. מצאו את המרחק בין ציר ה- y ובין המישור הנתון.

2) נתונים ישר ומישור $\pi:3x+12y-4z+k-10=0$, $l:\underline{x}=(1,k-1,5)+t(4,-2,-3)$.

א. הוכיחו שהישר מקביל למישור או מוכל בו.

ב. מצאו את ערכו של הפרמטר k שעבורו המרחק בין הישר למישור הוא 1.

תשובות סופיות

1) א. הישר מקביל למישור. ב. $\frac{6}{\sqrt{17}}$

2) א. שאלת הוכחה. ב. $k=2,4$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין מישורים מקבילים

שאלות

1) נתונה משוואת מישור: $\pi : 3x-4y+5z-10=0$.
מצאו משוואת מישור המקביל למישור הנתון והנמצא במרחק $\sqrt{8}$ ממנו.

2) נתונים שני מישורים מקבילים: $\pi_1 : x-2y-2z+6=0$, $\pi_2 : x-2y-2z-12=0$.
מצאו את משוואת המישור המקביל לשני המישורים הנתונים והנמצא במרחק שווה משניהם.

3) נתונים שישה מישורים:
$\pi_1 : 2x+y-2z-11=0$, $\pi_2 : x+2y+2z+5=0$, $\pi_3 : 2x-2y+z+3=0$
$\pi_4 : 2x+y-2z+7=0$, $\pi_5 : x+2y+2z-1=0$, $\pi_6 : kx+qy+z+p=0$
מצאו את ערכי הפרמטרים k, q ו- p, שעבורם ששת המישורים יוצרים תיבה שנפחה 60 יחידות נפח.

4) כדור שמרכזו בנקודה $O(3,8,-1)$ חסום בקובייה שבסיסה התחתון מונח על מישור שמשוואתו $12x+4y-3z-6=0$.
מצאו את משוואת המישור עליו מונח הבסיס העליון של הקובייה.

תשובות סופיות

1) $\pi_1 : 3x-4y+5z+10=0$, $\pi_2 : 3x-4y+5z-30=0$

2) $\pi_3 : x-2y-2z-3=0$

3) $k=2$, $q=-2$, $p=18,-12$

4) $12x+4y-3z-136=0$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מרחק בין ישרים מצטלבים

שאלות

1) נתונים שני ישרים, $\ell_1 : \underline{x} = (-3,2,6) + t(-4,1,2)$
ו- $\ell_2 : \underline{x} = (0,2,-7) + s(1,0,-1)$.
הראו שהישרים מצטלבים ומצאו את המרחק שביניהם.

2) נתונים שני ישרים מצטלבים, $\ell_1 : \underline{x} = (-1,0,5) + t(1,1,-2)$
ו- $\ell_4 : \underline{x} = (2,-1,9) + s(6,-1,0)$.
מצאו את המרחק שביניהם.

3) מצאו את מרחק הישר $\ell : \underline{x} = (4,-2,-1) + t(-1,1,6)$ מציר ה- z.

תשובות סופיות

1) $\frac{10}{\sqrt{6}}$ יח"א.
2) 1.567 יח"א.
3) $\sqrt{2}$ יח"א.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שאלות מסכמות

1) נתונות הנקודות $A(1,1,3)$, $B(1,2,0)$, $C(1,1,1)$.

א. מצאו הצגה פרמטרית של הישר המחבר את B עם C.
הראו כי הנקודה A לא נמצאת על הישר הזה.

ב. חשבו את המרחק בין הנקודה A לבין הישר המחבר את B עם C.

ג. מצאו את משוואת המישור, העובר דרך הנקודה A והמאונך לישר המחבר את B עם C.

2) מצאו את מצבם ההדדי של זוגות הישרים הבאים וקבעו אם הם נחתכים, מקבילים, מתלכדים או מצטלבים.
במקרה בו הישרים נחתכים, מצאו גם את נקודות החיתוך ואת הזווית בין הישרים.
במקרה בו הישרים מקבילים או מצטלבים, מצאו גם את המרחק ביניהם.

א. $\underline{x}=(1,1,0)+s(2,4,0)$, $\underline{x}=(1,0,1)+t(1,2,0)$

ב. $\underline{x}=(1,-1,0)+s(12,-3,1)$, $\underline{x}=(-2,2,4)+u(6,6,1)$

ג. $\underline{x}=(2,3,1)+s(2,4,-2)$, $\underline{x}=(1,1,2)+t(1,2,-1)$

ד. $\underline{x}=(2,0,3)+s(-1,-3,1)$, $\underline{x}=(1,-1,0)+t(0,2,-4)$

3) מצאו את המצב ההדדי של המישור והישר וקבעו אם הישר חותך את המישור, מקביל למישור או מוכל במישור.
במקרה שהישר חותך את המישור, מצאו גם את נקודת החיתוך וגם את הזווית בין הישר למישור.
במקרה בו הישר מקביל למישור מצאו את מרחק הישר מהמישור.

א. $\underline{x}=(1,0,2)+t(-1,2,2)$, $2x-3y+4z-5=0$.

ב. $\underline{x}=(-3,0,4)+t(4,-2,-6)$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $\underline{x}=(2,1,-2)+t(-2,2,0)$, $2x-14y+10z=-6$.

4) מצאו את המצב ההדדי של המישורים וקבעו אם הם מקבילים, מתלכדים או נחתכים. במקרה בו המישורים מקבילים מצאו את המרחק ביניהם.
במקרה בו הם נחתכים מצאו את הזווית ביניהם ואת ישר החיתוך ביניהם.

א. $2x+y+2z-4=0$, $x-2y+2z-10=0$.

ב. $4x-10y+6z-8=0$, $2x-5y+3z-6=0$.

ג. $x-7y+5z=-3$, $2x-14y+10z=-6$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה קובייה ABCDA'B'C'D', שנפחה הוא 8.
משוואת המישור שעליו מונח הבסיס ABCD היא $\pi_1 : 4x+y+3z-28=0$.
משוואת המישור שעליו מונחת הפאה ABB'A' היא $\pi_2 : x+2y-2z+6=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של הישר שעליו מונח המקצוע CD (2 אפשרויות).

6) הנקודה $A(4,0,-1)$ נמצאת על כדור, שמרכזו $O(1,1,2)$.
מצאו את משוואת המישור המשיק לכדור בנקודה A.

7) נתונים מישור וישר $\pi : 2x-y+2z+1=0$, $\ell : \underline{x}=(1,5,5)+t(1,1,0)$.
מצאו נקודה על חלקו החיובי של ציר ה- z , הנמצאת במרחקים שווים מהמישור ומהישר.

8) נתונים שני מישורים $\pi_2 : 4x-2y+4z-1=0$, $\pi_1 : 2x-4y+4z-5=0$.
מצאו הצגה פרמטרית של ישר, שנמצא במרחק 2 ממישור π_1 ובמרחק 6 ממישור π_2 (מצאו הצגה של ישר אחד מתוך 4 אפשריים).

9) נתונים ישר ומישור $\pi : 6x+2y-z+5=0$, $\ell_1 : \underline{x}=(0,-3,0)+t(1,1,-8)$.
ישר נוסף, ℓ_2 , המקביל למישור π , עובר בנקודה $P(1,0,-4)$ וחותך את הישר ℓ_1 בנקודה Q. מבין הנקודות שבמישור π , הנקודה P' היא הקרובה ביותר לנקודה P, והנקודה Q' היא הקרובה ביותר לנקודה Q.
מצאו את שטח המלבן PQQ'P'.
(הדרכה: הביעו באמצעות t את וקטור הכיוון של ℓ_2)

10) נתונים שני מישורים $\pi_2 : 3x+y+2z+11=0$, $\pi_1 : 2x+y+z-5=0$.
ℓ_1 הוא ישר החיתוך בין שני המישורים.
המישור π_3 מכיל את הישר ℓ_1 ויוצר זווית של $60°$ עם הישר $\ell_2 : \underline{x}=(1,3,-4)+t(1,1,0)$.
מצאו את משוואת המישור π_3.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $\underline{x}=(1,2,0)+t(0,-1,1)$ ב. $\sqrt{2}$ ג. $y-z+2=0$

2) א. מקבילים, 1.095. ב. מצטלבים, 4.07 ג. מתלכדים
ד. נחתכים בנקודה $(1,-3,4)$. הזווית היא: $47.6°$.

3) א. מקביל, 0.9284. ב. מוכל.
ג. חותך בנקודה $(3.5,-0.5,-2)$, הזווית היא: $40.78°$.

4) א. נחתכים. ישר חיתוך: $\underline{x}=(0,-2,3)+t(3,-1,-2.5)$, זווית: $63.6°$.
ב. מקבילים. המרחק: 0.324. ג. מתלכדים.

5) $\ell:\underline{x}=(0,7,7)+t(8,-11,-7)$, $\ell:\underline{x}=(0,2.5,8.5)+t(2,-2.75,-1.75)$.

6) $\pi:\ -3x+y+3z+15=0$.

7) $(0,0,4)$ או $\left(0,0,14\frac{4}{5}\right)$.

8) $\ell:\underline{x}=\left(0,-14,-15\frac{3}{4}\right)+t(-14,14,21)$.

9) 10.467 יח"ש.

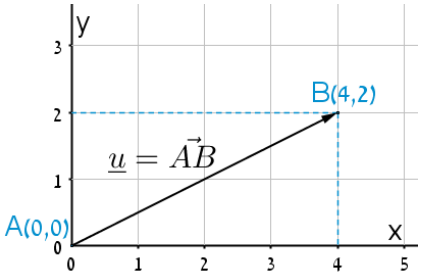
10) $\pi_3:x+2y-z-58=0$ או $\pi_3:2x+y+z-5=0$

סיכום כללי

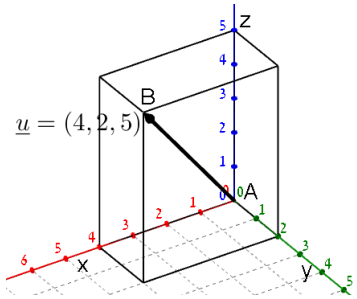
הגדרה כללית

וקטור שמוצאו בראשית הצירים $(0,0)$ וסופו בנקודה: (x,y) במישור ייכתב בצורתו האלגברית באופן הבא: $\underline{u}=(x,y)$.

דוגמאות:



- הווקטור $\underline{u}=(4,2)$ נמצא במישור $[xy]$, מוצאו בנקודה $A(0,0)$ וסופו בנקודה $B(4,2)$.



- הווקטור: $\underline{u}=(4,2,5)$ נמצא במרחב הקרטזי. מוצאו בראשית הצירים $A(0,0,0)$ וסופו בנקודה: $B(2,4,5)$.

וקטור שמוצאו אינו בראשית הצירים

וקטור שמוצאו בנקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ וסופו בנקודה: $B(x_2,y_2,z_2)$ ייכתב ע"י חישוב הפרש נקודת סופו ממוצאו באופן הבא: $\underline{u}=\overrightarrow{AB}=B-A=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

אמצע קטע וחלוקת קטע ביחס נתון

- אמצע הקטע M שקצוותיו הם: $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ הוא: $x_M=\frac{x_1+x_2}{2}, y_M=\frac{y_1+y_2}{2}, z_M=\frac{z_1+z_2}{2}$.
- שיעורי נקודה P המחלקת קטע שקצותיו $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ ביחס של $k:l$ הם: $z_P=\frac{k\cdot z_1+l\cdot z_2}{k+l}$; $y_P=\frac{k\cdot y_1+l\cdot y_2}{k+l}$; $x_P=\frac{k\cdot x_1+l\cdot x_2}{k+l}$.

מכפלה סקלרית וגודל של וקטור בהצגה אלגברית

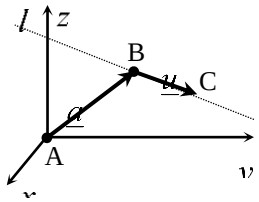
מכפלה סקלרית של שני וקטורים α ו- $\underline{v}$ תסומן: $\underline{u}\cdot\underline{v}$ ותחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos\alpha$ כאשר α היא הזווית הנוצרת בין נקודת חיבור מוצאי הווקטורים ובין כיווני הווקטורים.

מכפלה סקלרית של וקטורים: $\underline{v}=(x_2,y_2,z_2)$, $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ תחושב באופן הבא: $\underline{u}\cdot\underline{v}=(x_1,y_1,z_1)(x_2,y_2,z_2)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

גודלו של וקטור $\underline{u}=(x_1,y_1,z_1)$ נתון ע"י: $|\underline{u}|=\sqrt{\underline{u}^2}=\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$.

הצגה פרמטרית של ישר

ישר כללי במרחב ניתן להצגה ע"י שני וקטורים.



הווקטור $\underline{a}$ נקרא **וקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו על נקודה כלשהי על הישר הנתון.
הווקטור $\underline{u}$ נקרא **וקטור הכיוון של הישר.**
זה הוא וקטור שנמצא על הישר עצמו מוצאו בנקודה אחת וסופו בנקודה אחרת לאורך הישר.
הקשר בין שני הווקטורים נתון ע"י: $\ell: \underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$
כאשר t הוא מספר ממשי כלשהו ו- $\underline{x}$ הוא וקטור המתקבל ע"י בחירה של t שמוצאו בראשית הצירים וסופו על נקודה על הישר l.

<u>דוגמא</u>: עבור הנקודות: $A(0,0,0)$, $B(5,3,1)$ ו- $C(7,0,10)$ נקבל את הווקטורים הבאים: $\underline{u}=\overrightarrow{BC}=C-B=(7,0,10)-(5,3,1)=(2,-3,9)$; $\underline{a}=\overrightarrow{AB}=B-A=(5,3,1)$

לכן הצגה פרמטרית של הישר היא: $l:\underline{x}=(5,3,1)+t(2,-3,9)$.

כתב ופתר – גיא סלומון ©

***הערות:**

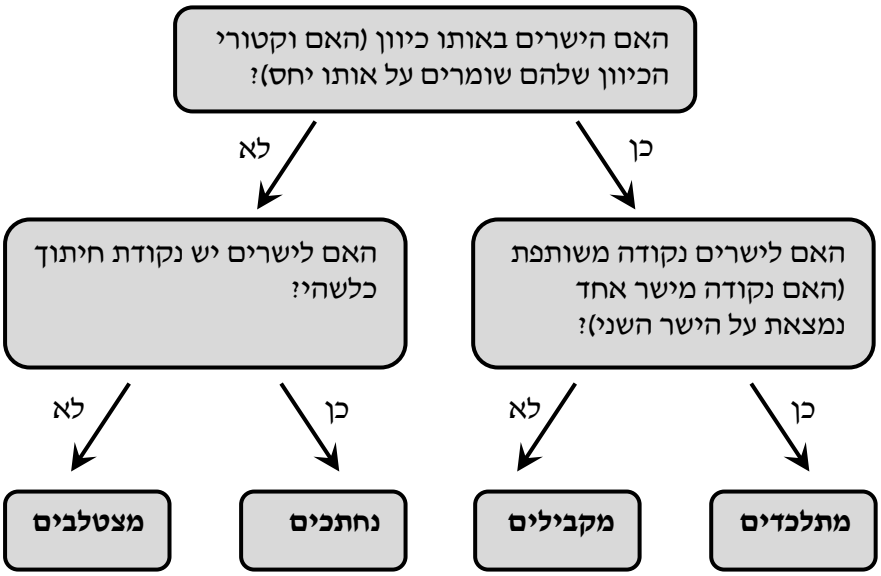
- לישר יש אינסוף הצגות פרמטריות הנבדלות זו מזו בבחירת ווקטור ההעתקה ווקטור הכיוון.
  ההצגה הבאה גם מתאימה לישר שבדוגמא: $l:\underline{x}=(7,0,10)+t(-6,9,-27)$
- הווקטור $\underline{x}$ המתקבל ע"י הצבת t_0 בהצגה פרמטרית אחת של הישר, יתקבל ע"י הצבת t_1 בהצגה פרמטרית אחרת של אותו הישר.
- הנקודה B באיור לעיל אינה בהכרח סופו של הווקטור $\underline{a}$ ומוצאו של הווקטור $\underline{u}$.
- כדי לכתוב הצגה פרמטרית של ישר מספיק לקחת שתי נקודות כלשהן למציאת הווקטור $\underline{u}$ (למשל הנקודה C יחד עם נקודה D הנמצאת על המשך הישר) ונקודה נוספת למציאת הווקטור $\underline{a}$.
- הצגה פרמטרית של ישר היא למעשה חיבור של שני ווקטורים גיאומטריים במרחב הנותנים ווקטור שמוצאו בראשית הצירים וסופו על הישר הנתון.

מצב הדדי בין ישרים

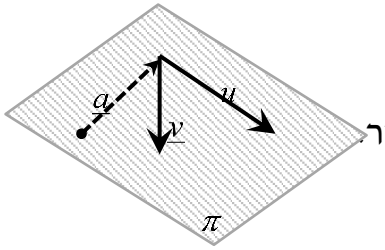
ישנם 4 מצבים הדדים בין זוג ישרים במרחב:

- ישרים מתלכדים: שני הישרים הם למעשה ישר אחד.
- ישרים מקבילים: שני הישרים בעלי אותו כיוון ולעולם אינם נפגשים במרחב.
- ישרים נחתכים: שני ישרים במרחב עם כיוונים שונים הנחתכים בנקודה כלשהי.
- ישרים מצטלבים: שני ישרים עם כיוונים שונים שאינם נפגשים במרחב.

כדי לקבוע את המצב ההדדי בין שני ישרים נבצע את הבדיקה הדו-שלבית הבאה:



הצגה פרמטרית של מישור



מישור כלשהו במרחב ניתן להצגה ע"י שלושה ווקטורים.
הווקטור $\underline{a}$ הוא **ווקטור ההעתקה**.
מוצאו תמיד בראשית הצירים וסופו בנקודה כלשהי על המישור.

הווקטורים $\underline{u}$ ו-$\underline{v}$ הם **וקטורי הכיוון של המישור.**
אלו הווקטורים הפורשים את המישור.

הקשר בין שלושת הווקטורים נתון ע"י: $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{u} + s\underline{v}$

כאשר t,s הם מספרים ממשיים כלשהם ו-$\underline{x}$ הוא ווקטור המתקבל ע"י בחירתם אשר מוצאו בראשית הצירים וסופו בנקודה על המישור π.

משוואת מישור

ניתן להציג מישור ע"י משוואה באופן הבא: $\pi : ax + by + cz + d = 0$,

כאשר: (x,y,z) היא נקודה על המישור והמקדמים a,b,c הם שיעורי ווקטור הנורמל של המישור המסומן: $\underline{h} = (a,b,c)$.

מצב הדדי בין ישר למישור

ישנם 3 מצבים הדדיים בין ישר ומישור במרחב:

- הישר חותך את המישור.
- הישר מקביל למישור.
- הישר מוכל במישור.

כדי לדעת מהו המצב ההדדי בין ישר ומישור יש להציב נקודה כללית של הישר במשוואת המישור ולבדוק:

- אם למשוואה המתקבלת יש פתרון יחיד אז הישר חותך את המישור.
- אם למשוואה אין אף פתרון אז הישר מקביל למישור.
- אם למשוואה יש אינסוף פתרונות אז הישר מוכל במישור.

מצב הדדי בין מישורים

בין שני מישורים ישנם 3 מצבים הדדיים:

- המישורים נחתכים - במקרה זה יש להם ישר משותף הנקרא **ישר החיתוך**.
- המישורים מקבילים – לשני המישורים וקטורים פורשים זהים אך ווקטור העתקה שונה.
- המישור מתלכדים - במקרה זה שני המישורים מייצגים את אותו המישור.

עבור שני מישורים כלליים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$

נקבעו את המצב ההדדי ביניהם באופן הבא:

מתלכדים	מקבילים	נחתכים
$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=\frac{d_1}{d_2}$	$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}\neq\frac{d_1}{d_2}$	כל מצב אחר

חישובי זוויות ונוסחאות

- זווית α בין שני וקטורים $\underline{v}$, $\underline{u}$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$.
- זווית חדה α בין שני ישרים $l_1=\underline{a}_1+t\underline{u}_1$ ו- $l_2=\underline{a}_2+s\underline{u}_2$ תחושב: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{u}_1\cdot\underline{u}_2}{|\underline{u}_1|\cdot|\underline{u}_2|}\right|$.
- זווית חדה α בין ישר $l=\underline{a}+t\underline{u}$ ומישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$

  תחושב ע"י הנוסחה הבאה: $\sin\alpha=\left|\frac{\underline{u}\cdot\underline{h}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{h}|}\right|$.
- זווית חדה α בין שני מישורים: $\pi_1:\ a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$

  ו- $\pi_2:\ a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ תחושב ע"י: $\cos\alpha=\left|\frac{\underline{h}_1\cdot\underline{h}_2}{|\underline{h}_1|\cdot|\underline{h}_2|}\right|$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

חישובי מרחקים ונוסחאות

1. מרחק בין שתי נקודות $A(x_1,y_1,z_1)$ ו- $B(x_2,y_2,z_2)$ במרחב יחושב באופן הבא: $d_{AB}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.

2. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ לישר הנתון בהצגה פרמטרית: $l:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{u}$ יחושב ע"י העברת אנך מהנקודה לישר וחישוב אורכו. כדי למצוא את נקודת החיתוך יש להשוות את מכפלת הווקטור האנך בווקטור הכיוון של הישר לאפס.

3. מרחק בין נקודה $A(x_1,y_1,z_1)$ למישור: $\pi:\ ax+by+cz+d=0$ יחושב ע"י: $d=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

4. מרחק בין שני ישרים מקבילים יחושב ע"י שימוש בנקודה מאחד הישרים ומציאת מרחקה מהישר השני כמתואר בסעיף 2.

5. מרחק בין ישר ומישור (המקביל לו) יחושב ע"י שימוש בנקודה שעל הישר ומציאה מרחקה מהמישור כמתואר בסעיף 3.

6. מרחק בין שני מישורים מקבילים יחושב לפי אחת מהאפשרויות הבאות:

   א. שימוש בנקודה שעל מישור אחד ומציאת מרחקה מהמישור השני.

   ב. שימוש בנוסחה: $d=\left|\frac{d_1-d_2}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$.

7. מרחק בין ישרים מצטלבים יחושב ע"י כתיבת משוואת מישור של אחד הישרים ומציאת מרחקו מהישר השני כמתואר בסעיף 5.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 15 - הגדרת הנגזרת - גזירות של פונקציה - נגזרות חד-צדדיות

תוכן העניינים

1. הגדרת הנגזרת וגזירות של פונקציה..... 143
2. נגזרות חד צדדיות..... 150

הגדרת הנגזרת, גזירות של פונקציה

שימו לב

בפרק זה יש לדעת גזירת פונקציות לפי נוסחאות גזירה, כפי שנלמד בבית הספר. למי שלא למדו זאת כדאי לעבור קודם לפרק הבא, ללמוד את הנושא, ורק אחר כך לחזור לכאן.

שאלות*

בשאלות **1-6** חשבו את הנגזרת של הפונקציה הנתונה על פי ההגדרה:

1) $f(x)=x^2+4x+1$ **2)** $f(x)=\frac{1}{x+1}$ **3)** $f(x)=\sin 4x$

4) $f(x)=e^x$ **5)** $f(x)=\ln x$ **6)** $f(x)=\sqrt{x+10}$

7) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-44)$.

8) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=2x(|x|+1)\sqrt{1+x+x^2}$.

9) חשבו את $f'(0)$, אם נתון כי $f(x)=x\cdot z(x)$ כאשר $\lim_{x\to 0} z(x)=4$, $z(0)=1$.

10) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x-1} & x>0\\ -(x+1)^2 & x\le 0\end{cases}$.

א. מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה רציפה.

ב. בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

11) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^n\sin\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ (n טבעי).

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^n \arctan\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ (n טבעי).

א. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה בנקודה $x=0$?

ב. עבור אילו ערכים של n הפונקציה גזירה ברציפות בנקודה $x=0$?

13) חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(4+x)-\ln 4}{x}$

ב. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{1+x}-e}{x}$

14) נתון כי f גזירה בנקודה x_0. הוכח כי:

א. $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

ב. $2x_0 f(x_0)-x_0^2 f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{x^2 f(x_0)-x_0^2 f(x)}{x-x_0}$

15) נתון כי f גזירה וזוגית. הוכיחו כי f' אי זוגית.

16) נתונה פונקציה המוגדרת ב-$[a,b]$ ומקיימת לכל x,y ב-$[a,b]$:

$|f(x)-f(y)|\le|x-y|^2$.

הוכיחו כי f גזירה ב-$[a,b]$ וחשבו את נגזרתה.

17) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\in\mathbb{Q} \\ x^3 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

18) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases} (x-1)^2 & x\in\mathbb{Q} \\ 0 & x\notin\mathbb{Q} \end{cases}$.

חשבו את $f'(x)$ על פי ההגדרה.

19) נתונה הפונקציה $f(x)=\left|\sin^5 x\right|$.

א. חשבו את $f'(x)$.

ב. מצאו את כל הנקודות עבורן $f'(x)=0$.

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

20) הוכיחו או הפריכו:

א. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.

ב. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g+h$ אינה גזירה ב-x_0.

ג. אם h אינה גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.

ד. אם h גזירה ב-x_0 ו-g אינה גזירה ב-x_0, אז $f=g\cdot h$ אינה גזירה ב-x_0.

21) הוכיחו או הפריכו:

א. אם f גזירה, אז $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]=f'(x)$.

ב. אם הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right]$ קיים וסופי, אז f גזירה.

22) הוכיחו או הפריכו:

א. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$.

ב. אם f גזירה ב-(a,b) ו-$\lim\limits_{x\to a^+} f'(x)=\infty$, אז $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

23) נתון כי $f(x)$ רציפה ב-$x=4$, ומקיימת $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-\pi-10(x-4)}{x-4}=0$.

הוכיחו ש-f גזירה ב-$x=4$, וחשבו את $f'(4)$.

24) תהי f פונקציה רציפה בסביבת הנקודה $x=0$ המקיימת $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

א. הוכיחו כי $f(0)=0$.

ב. הוכיחו כי f גזירה ב-$x=0$ ו-$f'(0)=0$.

25) תהי f פונקציה גזירה על כל הישר, ונתון כי $f(0)=0$ ו-$f'(0)=k$.

הוכיחו כי $\lim\limits_{x\to\infty} x\,f\left(\frac{1}{x}\right)=k$.

26) תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה x_0.

א. אם $f(x_0)\neq 0$, הוכיחו שגם $|f|$ גזירה ב-x_0.

ב. אם $f(x_0)=0$, הראו שייתכן כי $|f|$ גזירה ב-x_0 וייתכן שלא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

27) תהיינה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות בנקודה x_0.
נגדיר $h(x)=\max\{f(x),g(x)\}$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
הראו שאם $f(x_0)\neq g(x_0)$, אז h גזירה ב- x_0.

28) תהי f פונקציה זוגית ב- $\mathbb{R}$.
הוכיחו כי אם f גזירה ב- 0, אז $f'(0)=0$.

הערה: פתרו בשתי דרכים שונות.

29) נתונה פונקציה $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המקיימת $f(xy)=f(x)+f(y)$,
לכל $x,y\in(0,\infty)$.
נתון כי f גזירה בנקודה $x=1$.

א. הוכיחו כי $f(1)=0$ ו- $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$.

ב. הראו כי f גזירה, ושלכל $x>0$, $f'(x)=\frac{f'(1)}{x}$.

30) נתון כי f פונקציה גזירה המקיימת $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$.
הוכיחו ש- f פונקציה לינארית.

31) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו את הטענה הבאה:
אם f גזירה ב- x_0, אז $f'(x_0)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x_0+a_n)-f(x_0)}{a_n}$
לכל סדרה $a_n\to 0$.

ב. תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה בנקודה $x_0=1$, ו- $f(1)=1$.
הראו שאם $k\in\mathbb{N}$, אז
$\lim\limits_{n\to\infty} n\left[\left(f(1+\frac{1}{n})+f(1+\frac{2}{n})+\ldots+f(1+\frac{k}{n})\right)-k\right]=\frac{k(k+1)}{2}f'(1)$.

ג. חשבו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty} n\left[e^{\frac{1}{n}}+e^{\frac{2}{n}}+\ldots+e^{\frac{10}{n}}-10\right]$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

32) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שפונקציית דיריכלה $D(x)=\begin{cases}1 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ לא גזירה בכל מקום.

ב. הוכיחו שהפונקציה $f(x)=(x-1)^2D(x)$ גזירה **רק** בנקודה $x=1$.

33) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le x^2$ לכל x.
הוכיחו שהפונקציה גזירה ב- $x=0$.

34) פונקציה $f(x)$ מקיימת $|f(x)|\le \sin^2 x$ לכל x.
הוכיחו שהפונקציה גזירה באינסוף נקודות שונות.

35) תהי f פונקציה גזירה ב- x_0.

א. הוכיחו כי $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה רציפה f, באופן שהגבול בסעיף א' קיים,
אך $f'(x_0)$ אינו קיים.

ג. הביעו באמצעות $f'(x_0)$ את הגבול $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0-2h)-f(x_0+3h)}{h}$.

36) תהי f פונקציה גזירה פעמיים ב- x_0.

א. הוכיחו כי $f''(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-2f(x_0)+f(x_0-h)}{h^2}$.

ב. תנו דוגמה של פונקציה f, באופן שהגבול בסעיף א' קיים,
אך $f''(x_0)$ אינו קיים.

הערה: פתרו את סעיף א' רק אחרי למידת הנושא 'כלל לופיטל'.

37) נתון כי $f(x)$ רציפה בנקודה $x=a$, ונגדיר פונקציה חדשה $z(x)=(x-a)f(x)$.
הוכיחו או הפריכו:

א. הפונקציה $z(x)$ גזירה בנקודה $x=a$.

ב. $z'(x)$ רציפה ב- $x=a$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f'(x)=2x+4$ 2) $f(x)=-\frac{1}{(x+1)^2}$ 3) $f'(x)=4\cos 4x$

4) $f'(x)=e^x$ 5) $f(x)=\frac{1}{x}$ 6) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+10}}$

7) $!44$ 8) 2 9) 4

10) א. רציפה לכל x. ב. לא גזירה בנקודה $x=1$. קיים משיק אנכי בנקודה.

11) א. $n>1$ ב. $n>2$

12) א. $n>1$ ב. $n>1$

13) א. $\frac{1}{4}$ ב. e

14) שאלת הוכחה.

15) שאלת הוכחה.

16) שאלת הוכחה. $f'=0$

17) הפונקציה גזירה רק ב- $x=0$, ומתקיים: $f'(0)=0$.

18) הפונקציה גזירה רק ב- $x=1$, ומתקיים: $f'(1)=0$.

19) א. $f'(x)=\begin{cases}5\sin^4 x\cos x & 2n\pi<x<(2n+1)\pi\\ 0 & x=n\pi\\ -5\sin^4 x\cos x & (2n+1)\pi<x<(2n+2)\pi\end{cases}$ ב. $x=\frac{\pi}{2}n$

20) שאלת הוכחה.

21) שאלת הוכחה.

22) שאלת הוכחה.

23) שאלת הוכחה.

24) שאלת הוכחה.

25) שאלת הוכחה.

26) שאלת הוכחה.

27) שאלת הוכחה.

28) שאלת הוכחה.

29) שאלת הוכחה.

30) שאלת הוכחה.

31) א. שאלת הוכחה. ב. שאלת הוכחה. ג. 55

32) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

33) שאלת הוכחה.

34) שאלת הוכחה.

35) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=|x|$ ג. $-5f'(x_0)$

36) א. שאלת הוכחה. ב. $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$

37) שאלת הוכחה.

לפתרונות מלאים בווידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נגזרות חד-צדדיות

שאלות

1) תארו שתי דרכים שונות לבדיקת גזירות של פונקציה מפוצלת בנקודות התפר שלה (נקודה שבה מתחלפת נוסחת הפונקציה).

השתמשו בפונקציה $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$ על מנת להדגים שתי שיטות אלה.

בנוסף, הסבירו מתי יש להשתמש בכל אחת משיטות אלה.

בשאלות **2-9** בדקו את גזירות הפונקציות בתחום הגדרתן, בכל דרך שתבחרו.

בנוסף, רשמו נוסחה עבור הנגזרת של כל אחת מהפונקציות.

2) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x^2-5x & x\ge 2 \\ x^3-14 & x<2 \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} x^2+8x & x\ge 2 \\ x^3+12 & x<2 \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} \ln(1+2x) & -0.5<x<0 \\ x^2+2x & x\ge 0 \end{cases}$

6) $f(x)=2+4|x-1|$

7) $f(x)=3x^2+x|x|+1$

8) $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$

10) בדקו האם הפונקציה משאלה **5** גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

11) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \sqrt[3]{x+1} & x\ge -1 \\ \frac{1}{x}+a & x<-1 \end{cases}$.

א. עבור איזה ערך של הקבוע a הפונקציה רציפה בנקודה $x=-1$?

ב. עבור ערך ה- a שקיבלת בסעיף א', בדקו על פי הגדרת הנגזרת האם הפונקציה הנתונה גזירה בנקודה $x=-1$.
האם קיים משיק בנקודה זו?

* בפרק זה חל איסור להשתמש בכלל לופיטל.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

12) מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}\ln^3 x & 0<x\le e\\ ax+b & x>e\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

13) מצאו עבור אלו ערכים של הקבועים a ו- b הפונקציה הבאה גזירה בנקודת התפר: $f(x)=\begin{cases}e^x & 0<x\le 1\\ ax+b & x>1\end{cases}$.
עבור ערכים אלו, רשמו נוסחה עבור הנגזרת.

14) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}+4x & x<0\\ px+q & x\ge 0\end{cases}$.
קבעו עבור אילו ערכים של הקבועים p ו- q הפונקציה הנתונה:
א. רציפה. ב. גזירה.

15) חשבו את $f'(0)$, עבור הפונקציה: $f(x)=\left|x^4-x^3+\sin(10x)-1\right|$.

16) נתונה הפונקציה: $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|\cos\pi x|} & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$.
הוכיחו שהפונקציה לא גזירה לכל x ממשי.

תזכורת (הערך השלם)

פונקציית הערך השלם $[x]$ מחזירה לכל מספר ממשי x את המספר השלם הגדול ביותר, שקטן או שווה ל- x (מעגלת כלפי מטה). למשל: $[-4.1]=-5$, $[4.1]=4$.

17) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]-[-x]$.
חשבו את $f'(x)$.

18) נתונה הפונקציה $f(x)=[x]\sin(\pi x)$.
חשבו את $f'(x)$ **על פי ההגדרה**.

19) נתונה הפונקציה $f(x)=[x](1-\cos(\pi x))$.
חשבו את $f'(x)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

20) הוכיחו שאם f היא פונקציה המקיימת $|f(x)| \le x^2$ לכל x,
אז f גזירה ב-$x=0$.

21) תהי f פונקציה רציפה ב-$x_0=0$.
הוכיחו כי הפונקציה $z(x)=|x|\,f(x)$ גזירה ב-$x_0=0$ אם ורק אם $f(0)=0$.

22) יהיו f ו-g שתי פונקציות המוגדרות בסביבה מלאה של $x_0 \in \mathbb{R}$.
הוכיחו או הפריכו:

א. אם $f(x_0)=g(x_0)$ ו-$f'_-(x_0)=g'_+(x_0)$,
אז הפונקציה z, המוגדרת על ידי $z(x)=\begin{cases} f(x) & x \le x_0 \\ g(x) & x \ge x_0 \end{cases}$, גזירה ב-$x_0$.

ב. אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ לא גזירה ב-x_0 ו-$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה ב-$\mathbb{R}$,
אז $g\circ f$ איננה גזירה ב-$\mathbb{R}$.

ג. אם g גזירה מימין ב-x_0 והפונקציה f מוגדרת בסביבה מלאה של
$g(x_0)$ וגזירה מימין ב-$g(x_0)$, אזי $f\circ g$ גזירה מימין ב-x_0.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

23) תהיינה f ו-g פונקציות המוגדרות ב-$\mathbb{R}$.
נתון ש-g היא פונקציה רציפה ב-$\mathbb{R}$, ולכל $x>y$
מתקיים $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=g\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.
הוכיחו כי f גזירה ב-$\mathbb{R}$, ושלכל x ממשי מתקיים $f'(x)=g(x)$.

24) נתונה הפונקציה $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x}{x} & x\ge 1 \\ \dfrac{\pi}{4}-\arctan x & x<1 \end{cases}$.

א. בדקו את רציפות וגזירות f.

ב. בדקו האם f הפיכה בתחום הגדרתה. אם כן, מצאו את $f^{-1}(x)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

2) $f'(x)=\begin{cases}2x-4 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

3) $f'(x)=\begin{cases}2x-5 & x>2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

4) $f'(x)=\begin{cases}2x+8 & x\ge 2\\ 3x^2 & x<2\end{cases}$

5) $f'(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{1+2x} & -0.5<x<0\\ 2x+2 & x\ge 0\end{cases}$

6) $f'(x)=4\ (x>1)\quad,\quad f'(x)=-4\ (x<1)$

7) $f'(x)=8x\ (x\ge 0)\quad,\quad f'(x)=4x\ (x<0)$

8) $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$

10) לא גזירה פעמיים בנקודה $x=0$.

11) א. $a=1$ ב. לא גזירה. לא קיים משיק.

12) $a=3/e\quad b=-2$ $f'(x)=\begin{cases}\frac{3}{x}\ln^2 x & 0<x<e\\ \frac{3}{e} & x\ge e\end{cases}$

13) $a=e\quad b=0$ $f'(x)=\begin{cases}e^x & 0<x<1\\ e & x\ge 1\end{cases}$

14) א. $q=0$ ב. $q=0,\ p=4$

15) -10

16) שאלת הוכחה.

17) $f'(x)=\begin{cases}0 & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

18) $f'(x)=\begin{cases}[x]\cos(\pi x)\pi & x\notin\mathbb{Z}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z}\end{cases}$

19) $f'(x)=\begin{cases}[x]\sin\pi x & x\notin\mathbb{Z}\\ 0 & x\in\mathbb{Z},\ x\text{ even}\\ \text{undefined} & x\in\mathbb{Z},\ x\text{ odd}\end{cases}$

לפתרונות מלאים בווידאו של שאלות **20-23** היכנסו לאתר www.GooL.co.il

24) א. רציפה לכל x וגזירה לכל $x\neq 1$. ב. $f^{-1}(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & -1<x\le 0\\ \tan\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right) & 0<x<\dfrac{3\pi}{4}\end{cases}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 16 - חישוב נגזרת של פונקציה

תוכן העניינים

1. כללי הגזירה ..... (ללא ספר)
2. תרגול בכללי הגזירה 155
3. תרגילים נוספים לפי סוגים 159
4. גזירה סתומה 162
5. כלל השרשרת 164
6. גזירה לוגריתמית 167

תרגול בכללי הגזירה

שאלות

גזרו פעמיים את הפונקציות הבאות (בשאלות **27-35** מצאו רק את הנגזרת הראשונה):

1) $f(x)=\frac{x^2+2x+4}{2x}$

2) $f(x)=\frac{x^2-5x+6}{2x+10}$

3) $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)^2}$

4) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-4}$

5) $f(x)=\frac{x^3}{(x+1)^2}$

6) $f(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3$

7) $f(x)=\frac{\ln x}{x}$

8) $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

9) $f(x)=x\cdot\ln x$

10) $f(x)=x^2\cdot\ln x$

11) $f(x)=\ln\sqrt{\frac{1}{2-x}}$

12) $f(x)=\ln^2 x+2\ln x-32$

13) $f(x)=\ln^2 x+\frac{1}{\ln^2 x}$

14) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

15) $f(x)=(x+2)\cdot e^{\frac{1}{x}}$

16) $f(x)=x\cdot e^{-2x^2}$

17) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

18) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-1}$

19) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}(1-x)$

20) $f(x)=\sin(x^3)$

21) $f(x)=\cos(x^4)$

22) $f(x)=\sin^3 x$

23) $f(x)=\tan(x^2)$

24) $f(x)=\ln(\cos x^2)$

25) $f(x)=\arcsin(2x+3)$

26) $f(x)=\arctan(x^2)$

27) $f(x)=(x+1)^{\sin x}$

28) $f(x)=(\sin x)^x$

29) $f(x)=(\cos x)^{\ln x}$

30) $y=x^{\ln x}$

31) $y=\sqrt[x]{x}$

32) $y=x^{\sqrt{x}}$

33) $y=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$

34) $y=(x^2+1)^x$

35) $y=(x+1)^{(x+1)}$

הערה: בשאלות **28** ו-**29** נציג שתי דרכי פתרון. מומלץ לצפות בשתיהן.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $f'(x)=\frac{2x^2-8}{4x^2},\quad f''(x)=\frac{4}{x^3}$

2) $f'(x)=\frac{2x^2+20x-62}{(2x+10)^2},\quad f''(x)=\frac{448}{(2x+10)^3}$

3) $f'(x)=\frac{4x}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{4(1-2x)}{(x+1)^4}$

4) $f'(x)=\frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2},\quad f''(x)=\frac{4x\cdot(2x^2+24)}{(x^2-4)^3}$

5) $f'(x)=\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3},\quad f''(x)=\frac{6x}{(x+1)^4}$

6) $f'(x)=-\frac{6(x+1)^2}{(x-1)^4},\quad f''(x)=12\frac{(x+1)(x+3)}{(x-1)^5}$

7) $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2},\quad f''(x)=\frac{2\ln x-3}{x^3}$

8) $f'(x)=\frac{2-\ln x}{2x^{1.5}},\quad f''(x)=\frac{3\ln x-8}{4x^{2.5}}$

9) $f'(x)=\ln x+1,\quad f''(x)=\frac{1}{x}$

10) $f'(x)=x(2\ln x+1),\quad f''(x)=2\ln x+3$

11) $f'(x)=\frac{1}{2(2-x)},\quad f''(x)=\frac{1}{(4-2x)^2}$

12) $f'(x)=\frac{2}{x}(\ln x+1),\quad f''(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$

13) $f'(x)=\frac{2}{x}\left[\frac{(\ln x)^4-1}{(\ln x)^3}\right],\quad f''(x)=-\frac{2}{x^2}\left\{\frac{(\ln x)^5-(\ln x)^4-(\ln x)-3}{(\ln x)^4}\right\}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

14) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$

15) $f'(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{x^2-x-2}{x^2}\right),\quad f''(x)=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{5x+2}{x^4}\right)$

16) $f'(x)=e^{-2x^2}(1-4x^2),\quad f''(x)=-4xe^{-2x^2}(3-4x^2)$

17) $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9\cdot\sqrt[3]{x^4}}$

18) $f'(x)=\frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2-1)^2}},\quad f''(x)=\frac{2}{3}\cdot\frac{-\frac{1}{3}x^2-1}{(x^2-1)^{5/3}}$

19) $f'(x)=\frac{2-5x}{3\sqrt[3]{x}},\quad f''(x)=-\frac{2}{9}\cdot\frac{1+5x}{\sqrt[3]{x^4}}$

20) $f'(x)=\cos(x^3)\cdot 3x^2,\quad f''(x)=-9x^4\sin(x^3)+6x\cdot\cos(x^3)$

21) $f'(x)=-\sin(x^4)\cdot 4x^3,\quad f''(x)=-16x^6\cos(x^4)-12x^2\cdot\sin(x^4)$

22) $f'(x)=3\sin^2 x\cdot\cos x,\quad f''(x)=6\sin x\cos^2 x-3\sin^3 x$

23) $f'(x)=\frac{2x}{\cos^2(x^2)},\quad f''(x)=\frac{2\cdot\cos^2(x^2)-8x^2\cos(x^2)\sin(x^2)}{\cos^4(x^2)}$

24) $f'(x)=\tan(x^2)\cdot(-2x),\quad f''(x)=\frac{-4x^2}{\cos^2(x^2)}-2\tan(x^2)$

25) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}\cdot 2,\quad f''(x)=\frac{4(2x+3)}{\left(1-(2x+3)^2\right)^{1.5}}$

26) $f'(x)=\frac{2x}{1+x^4},\quad f''(x)=\frac{2-6x^4}{(1+x^4)^2}$

27) $f'(x)=x^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(x+1)+\frac{\sin x}{x+1}\right)$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

28) $f'(x)=(\sin x)^{x}\left(\ln(\sin x)+\cot x\cdot x\right)$

29) $f'(x)=(\cos x)^{\ln x}\cdot\left(\frac{\ln(\cos x)}{x}-\tan x\cdot\ln x\right)$

30) $y'=x^{\ln x}\left(\frac{2\ln x}{x}\right)$

31) $y'=x^{\frac{1}{x}-2}\left(1-\ln x\right)$

32) $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2}+1\right)$

33) $y'=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\ln\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{x}}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x^{2}}\right)\cdot\sqrt{x}\right)$

34) $y'=\left(x^{2}+1\right)^{x}\left(1\cdot\ln\left(x^{2}+1\right)+\frac{1}{x^{2}+1}\cdot 2x\cdot x\right)$

35) $y'=\left(x+1\right)^{(x+1)}\left[\ln\left(x+1\right)+1\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תרגילים נוספים לפי סוגים

שאלות

הנגזרת של פונקציית חזקה

1) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3$ ב. $f(x)=x^7$ ג. $f(x)=x^2$

ד. $f(x)=x^1$ ה. $f(x)=x^{-3}$ ו. $f(x)=x^{-1}$

ז. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ ח. $f(x)=x\frac{1}{3}$ ט. $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$

הנגזרת של קבוע כפול פונקציה

2) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=2x^3$ ב. $f(x)=3x^7$ ג. $f(x)=\frac{1}{2}x^4$

ד. $f(x)=\frac{x^6}{7}$ ה. $f(x)=8x^1$ ו. $f(x)=3x^{-2}$

ז. $f(x)=\frac{4}{x}$ ח. $f(x)=6x^{\frac{1}{2}}$ ט. $f(x)=\frac{x^{\frac{2}{3}}}{3}$

הנגזרת של קבוע

3) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=12$ ב. $f(x)=\frac{7}{8}$

הנגזרת של סכום והפרש

4) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=x^3+2x^2-3x+5$ ב. $f(x)=\frac{1}{4}x^4-\frac{x^3}{6}+\frac{3x}{4}-\frac{2}{5}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

הנגזרת של פונקציה חזקה מורכבת

5) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x-2)^3$ ב. $f(x)=(x^3+6)^5$ ג. $f(x)=3(x-x^2)^2$

ד. $f(x)=\frac{(5-x)^3}{4}$ ה. $f(x)=\frac{2(x+1)^4}{3}$

הנגזרת של אחד חלקי איקס

6) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3}{x}$ ב. $f(x)=\frac{2}{x}$ ג. $f(x)=\frac{1}{x^2}$ ד. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

ה. $f(x)=\frac{1}{x^2-3x}$ ו. $f(x)=\frac{2}{3-x}$ ז. $f(x)=\frac{6}{x+5}$

הנגזרת של מכפלה

7) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=(5x+1)(x-3)$

ב. $f(x)=(5x+1)^3(x-3)$

ג. $f(x)=x^3(6-x)^4$

הנגזרת של מנה

8) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\frac{3x-1}{1+2x}$ ב. $f(x)=\frac{x^2+1}{5x-12}$ ג. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+3}$

ד. $f(x)=\frac{x^2+8}{x-1}$ ה. $f(x)=\frac{1}{x}$ ו. $f(x)=\frac{3}{x^3}$

הנגזרת של שורש

9) גזרו את הפונקציות הבאות:

א. $f(x)=\sqrt{x}$ ב. $f(x)=4\sqrt{x+1}$ ג. $f(x)=\sqrt{x^3-1}$

ד. $f(x)=(3x+1)\sqrt{x}$ ה. $f(x)=x^2\sqrt{x+3}$ ו. $f(x)=\frac{x+3}{\sqrt{x}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

תשובות סופיות

1)

א. $f'(x)=3x^2$ ב. $f'(x)=7x^6$ ג. $f'(x)=2x$

ד. $f'(x)=1$ ה. $f'(x)=3x^{-4}$ ו. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$

ז. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ח. $f'(x)=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ ט. $f'(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$

2)

א. $f'(x)=6x^2$ ב. $f'(x)=21x^6$ ג. $f'(x)=2x^3$

ד. $f'(x)=\frac{6x^5}{7}$ ה. $f'(x)=8$ ו. $f'(x)=-\frac{6}{x^3}$

ז. $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$ ח. $f'(x)=\frac{3}{\sqrt{x}}$ ט. $f'(x)=\frac{2}{9\sqrt[3]{x}}$

3) א. 0 ב. 0

4) א. $f'(x)=3x^2+4x-3$ ב. $f'(x)=x^3-\frac{x^2}{2}+\frac{3}{4}$

5) א. $f'(x)=15(5x-x)^2$ ב. $f'(x)=15x^2(x^3+6)^4$

ג. $f'(x)=6(x-x^2)(1-2x)$ ד. $f'(x)=-\frac{3}{4}(5-x)^2$ ה. $f'(x)=\frac{8(x+1)^3}{3}$

6) א. $f'(x)=-\frac{3}{x^2}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{x^2}$ ג. $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$ ד. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

ה. $f'(x)=-\frac{2x-3}{(x^2-3x)^2}$ ו. $f'(x)=\frac{2}{(3-x)^2}$ ז. $f'(x)=-\frac{6}{(x+3)^2}$

7) א. $f'(x)=10x-14$ ב. $f'(x)=(5x+1)^2(20x-44)$

ג. $f'(x)=x^2(6-x)^3(18-7x)$

8) א. $f'(x)=\frac{5}{(1+2x)^2}$ ב. $f'(x)=\frac{5x^2-24x-5}{(5x-12)^2}$ ג. $f'(x)=\frac{8x}{(x^2+3)^2}$

ד. $f'(x)=\frac{(x-4)(x+2)}{(x-1)^2}$ ה. $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ ו. $f'(x)=-\frac{9}{x^4}$

9) א. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ ב. $f'(x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ ג. $f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-1}}$

ד. $f'(x)=\frac{9x+1}{2\sqrt{x}}$ ה. $f'(x)=\frac{x(5x+12)}{2\sqrt{x+3}}$ ו. $f'(x)=\frac{x-3}{2x\sqrt{x}}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סולומון ©

גזירה סתומה

שאלות

1) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^2+y^5-1=1$.

2) גזרו את הפונקציה הסתומה $4\ln x+10\ln y=y^2$.

3) גזרו את הפונקציה הסתומה $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{xy}$.

4) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $e^{y^2-4x}+x^2y^3=\sin(y-2x)+4y+1$.
חשבו את y' בנקודה $(1,2)$.

5) נתונה הפונקציה הסתומה הבאה $\sqrt{4x+y^3}+\cos^2(xy)=\ln(x^2y+1)+\ln e^3$.
חשבו את y' בנקודה בה $y=0$.

6) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-xy=10$.

7) גזרו את הפונקציה הסתומה $x^y-y^x=1$.

8) נתונה פונקציה סתומה $xy-y^3+x^2-x=0$.
מצאו את ערך y^n בנקודה בה $y=1$.

9) נתון עקום שמשוואתו $yx^2+e^y=x$.

א. הראו שעבור $x=1$ קיים ערך y אחד ויחיד ומצאו אותו.

ב. חשבו את y'' בנקודה בה $x=1$.

10) נתון כי המשוואה $h(y)-x+1=2x^3+4e^y+2y$,
מגדירה את $y=y(x)$ כפונקציה סתומה של x.
נתון כי $h(y)$ גזירה ברציפות ויורדת.
הוכיחו כי $y(x)$ יורדת חזק.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) $y'=\frac{-2x}{5y^4-1}$ $\quad 5y^4-1\neq 0,$

2) $y'=\frac{-\frac{4}{x}}{\frac{10}{y}-2y}$ $\quad \frac{10}{y}-2y\neq 0,$

3) $y'=\frac{\sqrt{y}-1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{2\sqrt{y}}{1-\sqrt{x}}$ $\quad \sqrt{x}\neq 0,\quad \sqrt{x}\neq 1,$

4) $y'_{(1,2)}=-\frac{14}{11}$

5) $y'_{(1,0)}=1$

6) $y'=\frac{y-x^y\cdot\frac{y}{x}}{x^y\cdot\ln x-x}$ $\quad x^y\cdot\ln x-x\neq 0,$

7) $y'=\frac{-x^y\cdot\frac{y}{x}+y^x\cdot\ln y}{x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}}$ $\quad x^y\ln x-y^x\cdot\frac{x}{y}\neq 0,$

8) -1

9) ב. $y''_{(1,0)}=-\frac{9}{8}$

10) שאלת הוכחה.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

כלל השרשרת

שאלות

1) נתונה פונקציה $f(x)$, המקיימת $f'(4)=10$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g(x)=f(x^2)$.

חשבו את $g'(2)$.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. נתונה פונקציה $f(x)$. נגדיר פונקציה חדשה

$z(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)-f(4x+1)$.

חשב ואת $z'(x)$.

ב. נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(1)=2,\ f'(1)=e$.

נגדיר פונקציה חדשה $z(x)=f^2(\ln x)+\frac{1}{f^2(\ln x)}$.

חשבו את $z'(e)$.

3) נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f^2(\sqrt{x})-1}{f(\sqrt{x})}$.

ידוע כי $f(10)=f'(10)=4$.

חשבו $g'(100)$.

4) נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{f\left(\frac{1}{x}\right)+4}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$, $f(1)=1$.

חשבו $g'(1)$.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

5) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^2(\ln x)}{f(\ln x)+1}$.

ידוע כי $f'(0)=1$, $f(0)=2$.

חשבו $g'(1)$.

6) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{f^{10}(4x)+1}{f\left(\dfrac{4}{x}\right)+1}$.

ידוע כי $f'(4)=2$, $f(4)=1$.

חשבו $g'(1)$.

7) נתונה הפונקציה $g(x)=\dfrac{\sqrt[4]{f^7(x^2)}}{f(x^4)}$.

ידוע כי $f'(1)=4$, $f(1)=1$.

חשבו $g'(1)$.

8) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו שהנגזרת של פונקציה זוגית היא פונקציה אי-זוגית והנגזרת של פונקציה אי-זוגית היא פונקציה זוגית.

ב. הפונקציה $f(x)$ היא אי-זוגית. בדקו האם הפונקציה $f''''(x)$ היא זוגית או אי-זוגית.

ג. הפונקציה $f(x)$ אי-זוגית נגדיר $g(x)=(f(x))^4$.
קבעו האם הפונקציה $g'(x)$ זוגית או אי-זוגית.

ד. ידוע שנגזרת של פונקציה היא זוגית.
האם ניתן לקבוע שהפונקציה היא אי-זוגית?

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) 40

2) א. $z'(x)=f'\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right)-f'(4x+1)\cdot 4$ ב. $z'(e)=3\frac{3}{4}$

3) $\frac{17}{80}$

4) 36

5) $\frac{8}{9}$

6) 44

7) -2

8) ב. אי-זוגית. ג. אי-זוגית. ד. לא.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גזירה לוגריתמית

שאלות

גזרו את הפונקציות הבאות:

1) $y=\sqrt[4]{\frac{10x-1}{x+1}}\cdot\sqrt[10]{(2x+1)^7}$

2) $y=\left(\sqrt[4]{10x+1}\right)^{2x}$

3) $y=\frac{(x+2)^{3x+4}\cdot(5x+6)}{(7x+8)\cdot(9x+10)}$

תשובות סופיות

1) $y'=y\left[\frac{1}{4}\frac{1}{10x-1}\cdot 10+\frac{7}{10}\frac{1}{2x+1}\cdot 2-\frac{1}{4}\frac{1}{x+1}\right]$

2) $y'=\left((10x+1)^{\frac{1}{4}}\right)^{2^x}\cdot\frac{1}{4}\left[2^x\cdot\ln 2\cdot\ln(10x+1)+\frac{1}{10x+1}\cdot 10\cdot 2^x\right]$

3) $y'=y\left[3\cdot\ln(x+2)+\frac{1}{x+2}(3x+4)+\frac{1}{5x+6}\cdot 5-\frac{1}{7x+8}\cdot 7-\frac{1}{9x+10}\cdot 9\right]$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

מתמטיקה ב

פרק 17 - טריגונומטריה - זהויות

תוכן העניינים

1. כללי ..... (ללא ספר)

מתמטיקה ב

פרק 18 - נושאים מתקדמים - הצגה פולרית של פונקציה

תוכן העניינים

1. קואורדינטות קוטביות 168
2. הנגזרת ושימושיה 170
3. שימושי האינטגרל המסוים 171

קואורדינטות קוטביות

שאלות

1) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(4,\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(-1,-1)$ לנקודה קוטבית.

2) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את הנקודה הקוטבית $\left(10,-\frac{\pi}{3}\right)$ לנקודה קרטזית.

ב. המירו את הנקודה הקרטזית $(0,-4)$ לנקודה קוטבית.

ג. המירו את הנקודה הקרטזית $(-2,2)$ לנקודה קוטבית.

3) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $4x-x^2=1+xy$ לקואורדינטות קוטביות.

ב. המירו את המשוואה $r=-4\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

4) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $x^2+y^2=4y$ לקואורדינטות פולריות.

ב. המירו את המשוואה $x=10$ לקואורדינטות פולריות.

ג. המירו את המשוואה $y=4$ לקואורדינטות פולריות.

5) ענו על הסעיפים הבאים:

א. המירו את המשוואה $r=4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ב. המירו את המשוואה $\theta=\pi/4$ לקואורדינטות קרטזיות.

ג. המירו את המשואה $r=2\cos\theta+4\sin\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

ד. המירו את המשוואה $6r^3\sin\theta=4-\cos\theta$ לקואורדינטות קרטזיות.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א. $(x,y)=\left(2,2\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{4}\right)$

2) א. $(x,y)=\left(5,-5\sqrt{3}\right)$ ב. $(r,\theta)=\left(4,\frac{3\pi}{2}\right)$ ג. $(r,\theta)=\left(\sqrt{8},\frac{3\pi}{4}\right)$

3) א. $4r\cos\theta-r^2\cos^2\theta=1+r\cos\theta\cdot r\sin\theta$ ב. $(x+2)^2+y^2=2^2$

4) א. $r=4\sin\theta$ ב. $r\cos\theta=10$ ג. $r\sin\theta=4$

5) א. $x^2+y^2=4^2$ ב. $y=x$ ג. $(x-1)^2+(y-2)^2=5$

ד. $6\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^3\cdot y=4\sqrt{x^2+y^2}-x$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

הנגזרת ושימושיה

שאלות

1) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r=3+8\sin\theta$ בנקודה $\theta=\frac{\pi}{6}$.

2) מצאו את משוואת המשיק לעקום $r=1-2\sin\theta$ בראשית הצירים.

תשובות סופיות

1) $y=\frac{11\sqrt{3}}{5}x-\frac{98}{5}$

2) $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x\ ,\ y=-\frac{\sqrt{3}}{3}x$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

שימושי האינטגרל המסוים

שאלות

1) חשבו את השטח של הלולאה הפנימית של $r=2(1+2\cos\theta)$.

2) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r=6+4\cos\theta$ ומשמאל לציר ה- y.

3) חשבו את השטח הכלוא בתוך $r=3+2\sin\theta$.

4) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=3+2\sin\theta$ ומחוץ ל- $r=2$.

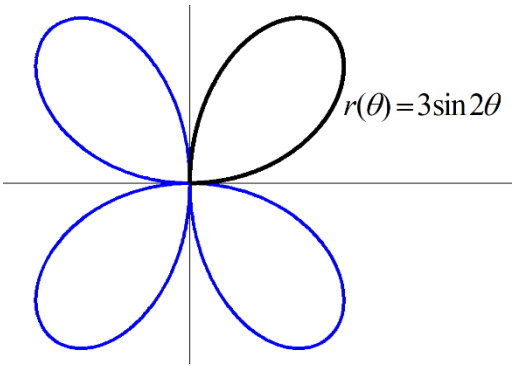
5) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=2$ ומחוץ ל- $r=3+2\sin\theta$.

6) חשבו את השטח המוגבל בתוך $r=2$ ובתוך $r=3+2\sin\theta$.

7) חשבו את השטח הכלוא בתוך המעגל $r=2\sin\theta$ ומחוץ למעגל $r=1$.

8) מצאו את אורך הקרדיואידה $r=1+\cos\theta$.

9) מצאו את האורך של עלה אחד של הוורד $r=3\sin 2\theta$.
אין צורך לחשב את האינטגרל!



10) מצאו את אורך העקום $r=\theta$, כאשר $0\le\theta\le 1$.

11) העקום $r=\cos\theta$, כאשר $0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- x.
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

12) העקום $r=4+4\sin\theta$, כאשר $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, מסתובב סביב ציר ה- y .
מהו שטח המעטפת של הגוף הנוצר?

תשובות סופיות

1) $S=4\pi-6\sqrt{3}=2.174$

2) $S=22\pi-48$

3) $S=11\pi$

4) $S=\frac{11\sqrt{3}}{2}+\frac{14\pi}{3}=24.187$

5) $S=\frac{11\sqrt{3}}{2}-\frac{7\pi}{3}=2.196$

6) 10.37

7) $S=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$

8) 8

9) $\ell=3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+3\cos^2 2\theta}\,d\theta$

10) $\ell=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(\sqrt{2}+1\right)}{2}$

11) $S_x=\pi$

12) $S_y=102.4\pi$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

נספח - גרפים נפוצים בקואורדינטות פולריות

קווים

1) $r\cos\theta = a$ - הישר $x = a$.
2) $r\sin\theta = b$ - הישר $y = b$.
3) $\theta = \beta$ - הישר העובר דך הראשית $y = (\tan\beta)x$.

מעגלים

1. $r = a$ - מעגל שמרכזו בראשית הצירים ורדיוסו a.
2. $r = 2a\cos\theta$ - מעגל שמרכזו בנקודה $(a,0)$ ורדיוסו $|a|$.
3. $r = 2b\sin\theta$ - מעגל שמרכזו בנקודה $(0,b)$ ורדיוסו $|b|$.
4. $r = 2a\cos\theta + 2b\sin\theta$ - מעגל שמרכזו בנק' (a,b) ורדיוסו $\sqrt{a^2+b^2}$.

קרדיודות ולמניסקטות

1) קרדיודות $r = a \pm a\cos\theta,\ r = a \pm a\sin\theta$:
גרף בצורת לב שמכיל את הראשית.

2) למניסקטות עם לולאה פנימית $r = a \pm b\cos\theta,\ r = a \pm b\sin\theta$ $(a < b)$:
גרף שיכיל לולאה פנימית ושתמיד יכיל את הראשית.

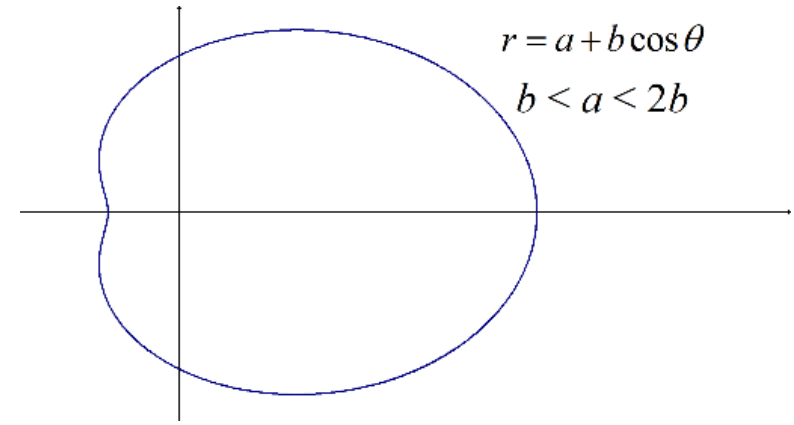
3) למניסקטות ללא לולאה פנימית $r = a \pm b\cos\theta,\ r = a \pm b\sin\theta$ $(a > b)$:
גרף ללא לולאה פנימית שאינו מכיל את הראשית.

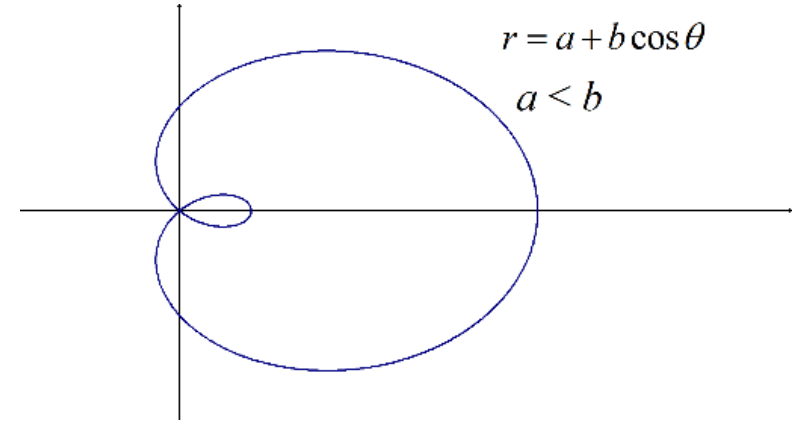
* נשרטט בדרך כלל עבור מחזור שלם $0 \le \theta \le 2\pi$.

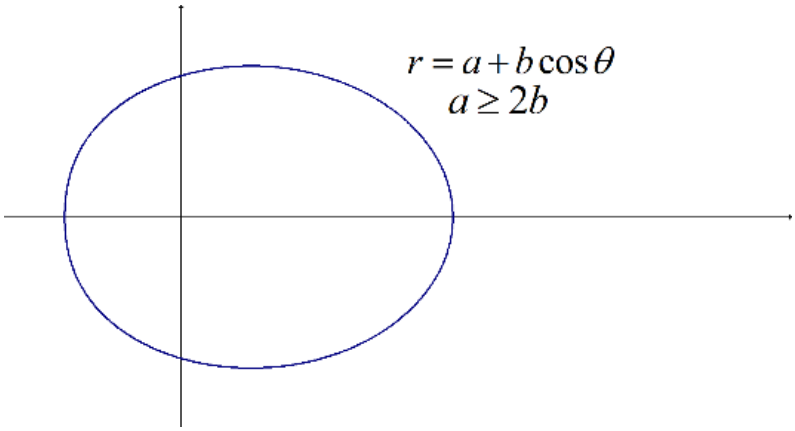
לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

למינסקטות ביתר פירוט

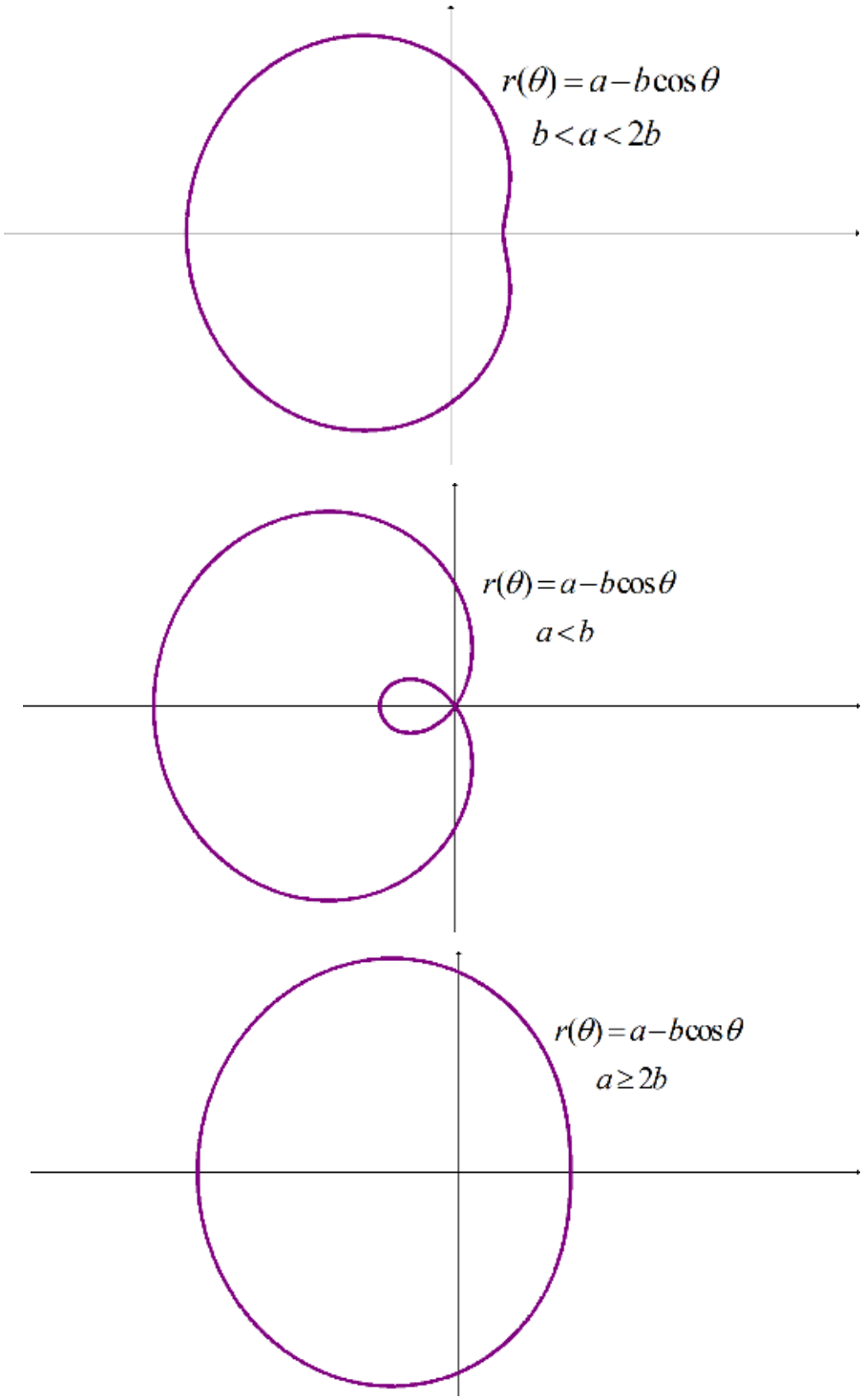
הגרף של $r = a + b\cos\theta$:





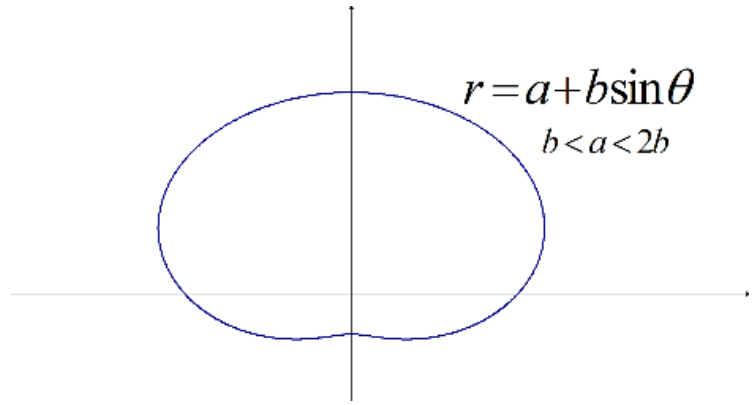


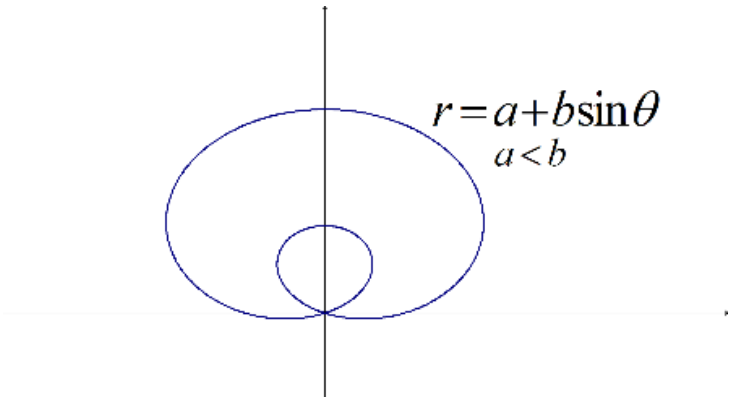
הגרף של $r = a - b\cos\theta$

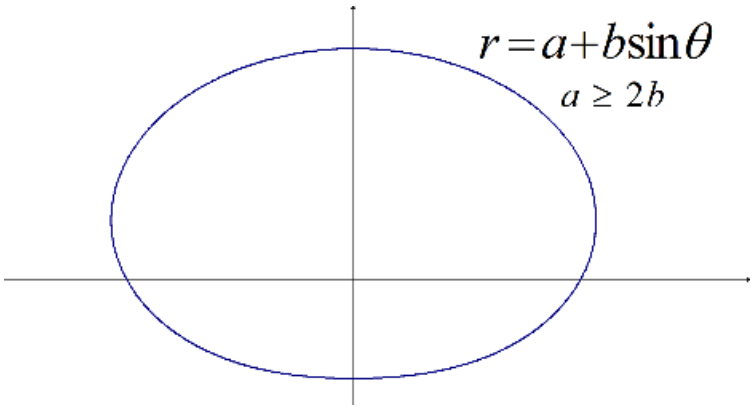


כתב ופתר – גיא סלומון ©

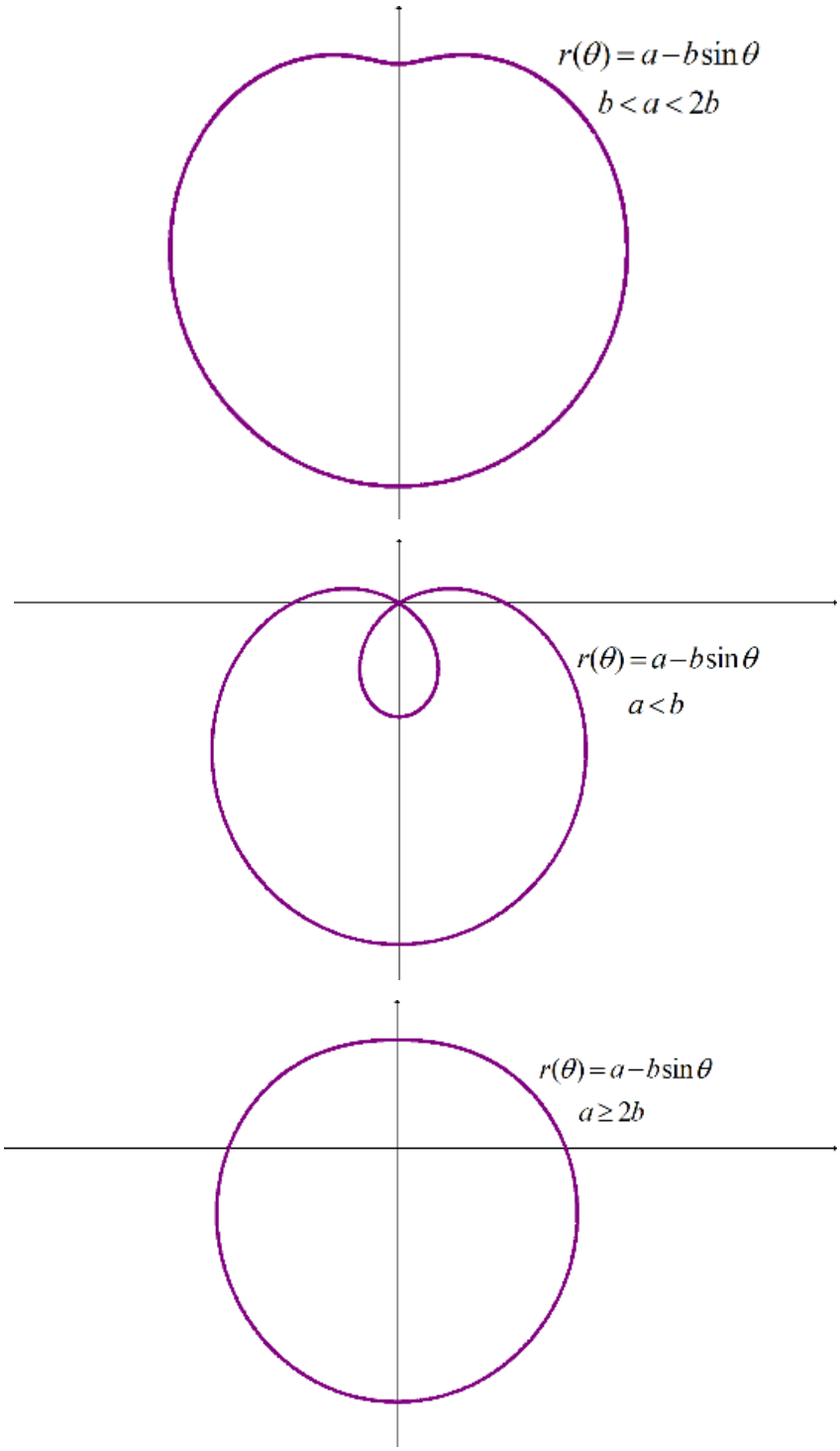
הגרף של $r = a + b\sin\theta$





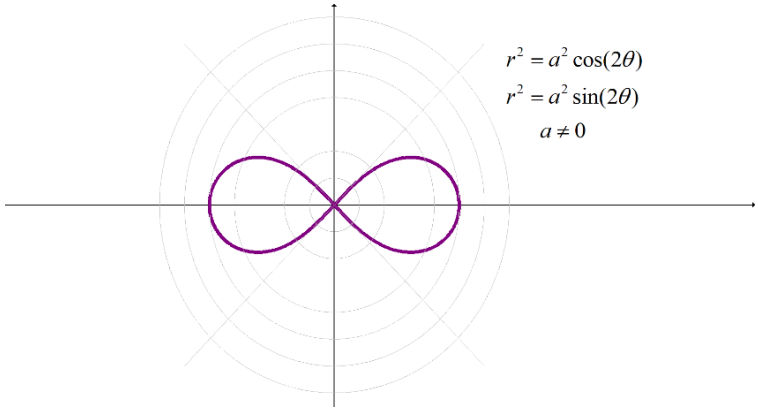


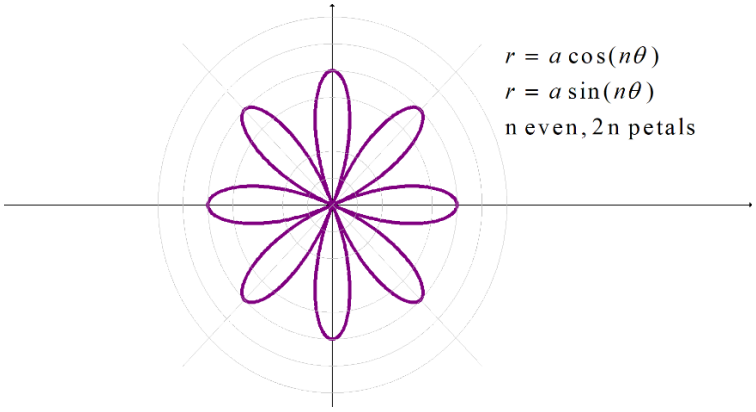
הגרף של $r = a - b\sin\theta$

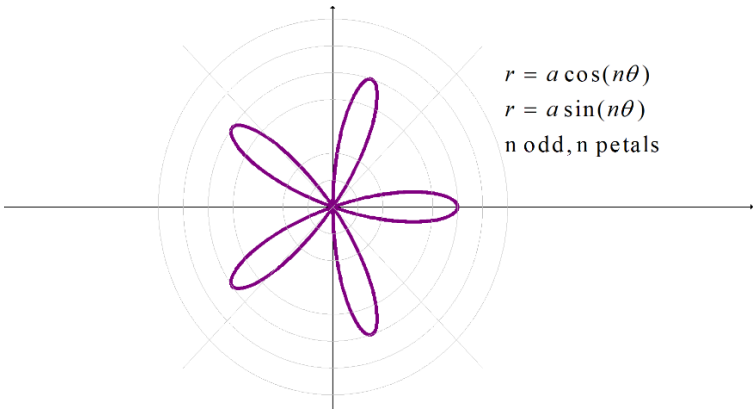


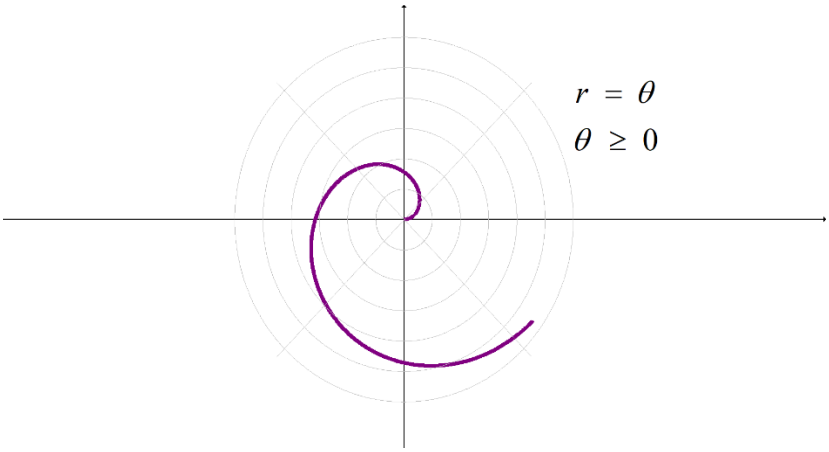
כתב ופתר – גיא סלומון ©

גרפים נפוצים נוספים









מתמטיקה ב

פרק 19 - פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות

תוכן העניינים

1. פתרון וחקירת מערכת משוואות ליניאריות 179
2. מערכות עם פרמטר 182

פתרון וחקירת מערכות של משוואות לינאריות

שאלות

1) מצאו אילו מהמערכות הבאות הן מערכות שקולות:

א. $\begin{aligned} x+10y&=11 \\ 2x-2y&=0 \end{aligned}$ ב. $\begin{aligned} x-4y&=-7 \\ x-y&=-1 \end{aligned}$ ג. $\begin{aligned} x-y&=0 \\ 2x+y&=3 \end{aligned}$ ד. $\begin{aligned} 2x+y&=4 \\ x+y&=3 \end{aligned}$

2) רשמו את המטריצות המתאימות למערכות המשוואות הבאות:

א. $\begin{aligned} x+10y&=11 \\ 2x-2&=0 \\ x+y&=3 \end{aligned}$ ב. $\begin{aligned} x-4y+z&=-7 \\ x-y&=-1 \\ x+y+z&=5 \end{aligned}$ ג. $\begin{aligned} 2x+y+z&=3 \\ x-z&=0 \end{aligned}$ ד. $\begin{aligned} x&=3 \\ 2x+y&=4 \\ z+t&=8 \end{aligned}$

בשאלות **3-5** בצעו על כל מטריצה את הפעולות הרשומות מתחתיה, בזו אחר זו, ומצאו את המטריצה המתקבלת (סדר הפעולות הוא משמאל לימין ומלמעלה למטה).

3) $\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

$R_1 \leftrightarrow R_2,\ R_1 \to 2R_1$

$R_3 \to R_3 + R_1,\ R_1 \leftrightarrow R_3$

4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$R_2 \to 4R_2,\ R_2 \to R_2 + R_1$

$R_2 \leftrightarrow R_3,\ R_3 \to R_3 - 3R_2$

5) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 8 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 0 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

$R_1 \to R_1 + 3R_3,\ R_2 \to R_2 + 3R_3$

$R_1 \to 5R_1 - 8R_2$

6) מצאו איזה פעולה אלמנטרית אחת יש לבצע על המטריצה שמשמאל, כדי לקבל את המטריצה מימין:

א. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

ב. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 17 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

ג. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **7-10** הביאו את המטריצות הבאות לצורה **מדורגת**
(בשאלות 7, ו-9 – גם לצורה **מדורגת קנונית**):

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -8 & -1 & 6 & 4 \\ 1 & 4 & -7 & 5 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 & -6 & 5 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 17 \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

בשאלות **11-22** פתרו את מערכות המשוואות בשיטת גאוס (כלומר, על ידי דירוג):

11) $\begin{aligned} 2x+3y&=8 \\ 5x-4y&=-3 \end{aligned}$

12) $\begin{aligned} 4x+8y&=20 \\ 3x+6y&=15 \end{aligned}$

13) $\begin{aligned} 8x-4y&=10 \\ -6x+3y&=1 \end{aligned}$

14) $\begin{aligned} 2x_1-x_2-3x_3&=5 \\ 3x_1-2x_2+2x_3&=5 \\ 10x_1-6x_2-2x_3&=32 \end{aligned}$

15) $\begin{aligned} x+2y+3z&=-11 \\ 2x+3y-z&=-5 \\ 3x+y-z&=2 \end{aligned}$

16) $\begin{aligned} x+2y+3z&=3 \\ 4x+6y+16z&=8 \\ 3x+2y+17z&=1 \end{aligned}$

17) $\begin{aligned} x+3y&=2 \\ 2x+y&=-1 \\ x-y&=-2 \end{aligned}$

18) $\begin{aligned} 4x-7y&=0 \\ 8x-14y&=2 \\ -16x+28y&=4 \end{aligned}$

19) $\begin{aligned} 3x-2y&=1 \\ -9x+6y&=-3 \\ 6x-4y&=2 \end{aligned}$

20) $\begin{aligned} x+2y-3z+2t&=2 \\ 2x+5y-8z+6t&=5 \\ 6x+8y-10z+4t&=8 \end{aligned}$

21) $\begin{aligned} x_1+5x_2+4x_3-13x_4&=3 \\ 3x_1-x_2+2x_3+5x_4&=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3-4x_4&=0 \end{aligned}$

22) $\begin{aligned} x+2y+2z&=2 \\ 3x-2y-z&=5 \\ 2x-5y+3z&=-4 \\ 2x+8y+12z&=0 \end{aligned}$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) א ו-ג שקולות, ו-ב ו-ד שקולות.

2) א. $\begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 & -7 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ ג. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

ד. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 9 & 2 & 6 & 10 \\ 3 & 5 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 8 & 4 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 8 & -32 & 37 & -4 \\ -1 & 9 & -5 & 3 \\ -1 & 4 & -5 & 1 \end{pmatrix}$

6) א. $R_1 \to 2R_1 + R_2$ ב. $R_2 \to R_2 - 4R_1$ ג. $R_2 \to 2R_2 + 4R_1$

7) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 24 & 21 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

8) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 9) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

10) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

11) $(x,y) = (1,2)$ 12) $(x,y) = (5-2t, t)$ 13) ϕ

14) ϕ 15) $(x_1, x_2, x_3) = (1,-3,-2)$

16) $(x,y,z) = (-1-7t, 2+2t, t)$ 17) $(x,y) = (-1,1)$

18) ϕ 19) $(x,y) = \left(\frac{1+2t}{3}, t\right)$

20) $(x,y,z,t) = (-a+2b, 1+2a-2b, a, b)$ 21) ϕ

22) $(x,y,z) = (2,1,-1)$

כתב ופתר – גיא סלומון ©

מערכות עם פרמטר

שאלות

בשאלות **6-1** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

1)
$$\begin{aligned} x-y+z&=1\\ 5x-7y+(k^2+3)z&=k^2+1\\ 3x-y+(k+3)z&=3 \end{aligned}$$

2)
$$\begin{aligned} x+ky+z&=1\\ x+y+kz&=1\\ kx+y+z&=1 \end{aligned}$$

3)
$$\begin{aligned} x+2ky+z&=0\\ 3x+y+kz&=2\\ x+9ky+5z&=-2 \end{aligned}$$

4)
$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0\\ x+2y-z&=0\\ 5x+(1-k)y+k^2z&=1 \end{aligned}$$

5)
$$\begin{aligned} kx-y&=1\\ (k-2)x+ky&=-2\\ (k^2-1)z&=9 \end{aligned}$$

6)
$$\begin{aligned} x+ky+3z&=2\\ kx-y+z&=4\\ 3x+y+(2+k)z&=0 \end{aligned}$$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

בשאלות **7-8** מצאו לאילו ערכי k (אם יש כאלה) יש למערכות:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.

7)
$$\begin{aligned} 2x+ky&=3\\ (k+3)x+2y&=k^2+5\\ 6x+3ky&=7k^2+2 \end{aligned}$$

8)
$$\begin{aligned} 2x-3y+z&=1\\ 4x+(k^2-5k)y+2z&=k \end{aligned}$$

9) נתונה המערכת: $\begin{cases} x+y-z=1\\ 3x-7y+(k^2+1)z=k^2-1\\ 4x-6y+(k+2)z=4 \end{cases}$.

א. רשמו את המטריצה המתאימה למערכת המשוואות.
ב. רשמו את הצורה המדורגת של המטריצה מסעיף א.
ג. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת:
1. פתרון יחיד. 2. אף פתרון. 3. אינסוף פתרונות.
ד. רשמו את הפתרון הכללי במקרה בו יש אינסוף פתרונות.
ה. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון שבו $z=0$.
ו. מצאו לאילו ערכי k יש למערכת פתרון יחיד שבו $z=0$.
ז. מצאו עבור איזה ערך של k פתרון של המשוואה השלישית הוא $(1,2,3)$.
האם ייתכן שהפתרון הנ"ל הוא גם פתרון של כל המערכת? הסבירו.
ח. מצאו לאיזה ערך של k, $(1,0,0)$ הוא הפתרון היחיד של המערכת.

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©

תשובות סופיות

1) .1 $k \neq 1,\ k \neq -2$ .2 $k = 1$ .3 $k = -2$

2) .1 $k \neq 1,\ k \neq -2$ .2 $k = -2$ .3 $k = 1$

3) .1 $k \neq -1,\ k \neq \frac{4}{7}$ .2 $k = \frac{4}{7}$ .3 $k = -1$

4) .1 $k \neq 1,\ k \neq -0.4$ .2 $k = 1,\ k = -0.4$

5) .1 $k \neq \pm 1,\ k \neq -2$ .2 $k = \pm 1, k = -2$

6) .1 $k \neq -1,\ k \neq -3,\ k \neq 2$ .3 $k = -1,\ k = -3,\ k = 2$

7) .1 $k = -1$ .2 $k \neq \pm 1$ .3 $k = 1$

8) .2 $k = 3$ .3 $k \neq 3$

9) א. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & k^2+1 & k^2-1 \\ 4 & -6 & k+2 & 4 \end{pmatrix}$ ב. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -10 & k^2+4 & k^2-4 \\ 0 & 0 & -k^2+k+2 & 4-k^2 \end{pmatrix}$

ג. .1 $k \neq -1$, $k \neq 2$ . .2 $k = -1$ .3 $k = 2$ ד. $(x, y, z) = (1+0.2t, 0.8t, t)$

ה. $k = \pm 2$ ו. $k = -2$ ז. $k = 2$, לא. ח. $k = -2$

לפתרון מלא בסרטוני וידאו היכנסו לאתר www.GooL.co.il
כתב ופתר – גיא סלומון ©